Co-funded by
the European Union

DiToM
Diagnostic Tool in Mathematics

Manual
Prueba de screening 6+

Este proyecto ha sido financiado con el apoyo de la Comisión Europea. Esta publicación refleja únicamente las opiniones del autor y la Comisión no se hace responsable del uso que pueda hacerse de la información contenida en ella.

Contenido

I. Introducción

El aprendizaje de las matemáticas es acumulativo: los nuevos contenidos se basan en conocimientos previos sólidos. Si faltan ideas y conceptos fundamentales, al alumnado le resulta cada vez más difícil construir una comprensión significativa de los temas posteriores. Los resultados de estudios internacionales y nacionales muestran que una parte considerable del alumnado no alcanza los niveles mínimos en matemáticas. Para la enseñanza diaria, esto significa que se necesitan procedimientos tempranos y prácticos para hacer visible el estado del aprendizaje y organizar un apoyo oportuno. Aquí es donde entra en juego el proyecto de la UE «Diagnostic Tool in Mathematics (DiToM)». En una colaboración entre Alemania, Croacia, España, Francia, Grecia, Italia, y Suecia, se han desarrollado cinco instrumentos de evaluación interrelacionados para proporcionar al profesorado una visión general compacta de su clase en los aspectos de transición educativa. Los aspectos de evaluación siguen un ritmo de dos años:

1. Transición de educación Infantil → Inicio de la educación Primaria
2. Fin del 2.º curso de primaria / inicio del 3.º curso de Primaria
3. Fin del 4.º curso de Primaria/comienzo del 5.º curso de Primaria
4. Fin del 6.º curso de Primaria/ inicio del 1.º curso de ESO
5. Fin del 2.º curso de ESO/ inicio del 3.º curso de ESO

¿Qué es una evaluación screening?
Una evaluación screening es una breve prueba grupal que se puede realizar a toda la clase en una sola sesión. Proporciona una visión general inicial y estructurada de las ideas fundamentales que ya están consolidadas y de las áreas en las que el alumnado puede necesitar apoyo adicional. Es importante destacar que una evaluación screening no sustituye a una evaluación cualitativa individual orientada al proceso del estado del pensamiento matemático del alumnado. Sirve como punto de partida: los resultados pueden ir seguidos de observaciones específicas, entrevistas y medidas de apoyo.

¿Por qué es útil?

- Proporciona una visión general rápida: qué habilidades fundamentales están aseguradas y dónde es útil revisarlas o ampliarlas.
- Permite un apoyo guiado: identifica al alumnado que pueda tener dificultades con los estándares mínimos de matemáticas básicas; organiza un apoyo temprano.
- Sirve para tomar decisiones diagnósticas: los resultados de la evaluación proporcionan una primera orientación clara que indica qué alumnado puede beneficiarse de medidas diagnósticas adicionales (por ejemplo, análisis más profundos de las tareas o entrevistas de seguimiento).
- Apoya las transiciones: centra la atención en las habilidades clave en las transiciones escolares cruciales.

Las tareas están orientadas al aula, su aplicación se describe claramente y la puntuación es rápida. El profesorado recibe un resumen conciso a nivel de clase, además de indicaciones sobre qué alumnado merece una atención más detallada en áreas de contenido específicas. Sobre esta base, se pueden planificar breves periodos de revisión, prácticas diferenciadas o tareas de transición.

Este manual ofrece una guía compacta sobre la finalidad y el uso del instrumento de evaluación, explica el diseño de la prueba, los tipos de tareas y los objetivos de evaluación específicos, proporciona instrucciones claras para la administración en el aula, describe la puntuación y la interpretación de los resultados y ofrece ideas prácticas para la instrucción posterior y el apoyo específico.

El objetivo es ofrecer una herramienta de evaluación práctica, fiable y fácil de usar que proporcione al profesorado una orientación rápida, llame la atención sobre posibles dificultades y apoye de forma concreta una ayuda eficaz para que el mayor número posible de alumnos aprenda matemáticas de forma segura, con comprensión y confianza.

II. ¿Qué se entiende por «destrezas matemáticas clave»?

El desarrollo de pruebas de diagnóstico requiere una base teórica. En el caso de las pruebas de evaluación screening para toda la clase esto significa centrarse en aquellas habilidades sin las cuales no se pueden aprender los contenidos posteriores de forma significativa. Siguiendo la posición clásica de Gagné y Briggs, cada nueva exigencia de aprendizaje se basa en una cantidad mínima de requisitos previos necesarios, a los que se refiere el término «destrezas matemáticas clave». Si estas no están disponibles, es poco probable que se adquiera con éxito el nuevo contenido y, por lo tanto, las tareas adecuadas se basan en lo que ya se ha aprendido. En matemáticas, el aprendizaje es, por lo tanto, jerárquico y acumulativo.

Comprensión conceptual: competencias, conceptos, destrezas y destrezas clave

En el proyecto DiToM distinguimos entre competencias y destrezas, que son mutuamente dependientes en la práctica del aula. Las competencias se refieren a una disposición perspicaz para actuar de manera adecuada en situaciones matemáticas. De este modo, los conceptos captan una visión sustantiva de las relaciones matemáticas. La activación comprensible de las competencias surge en una destreza, como el rendimiento practicado por parte del alumnado. Las destrezas clave son aquellas cuya ausencia dificulta o impide sustancialmente el aprendizaje posterior. Funcionan como requisitos previos necesarios para contenidos posteriores. Las evaluaciones screening se centran en la aritmética y el álgebra, debido a su estructura jerárquica y a su importancia también para otros ámbitos de las matemáticas (por ejemplo, la geometría), que es compatible tanto a nivel nacional como entre países.

A continuación, se amplían dos ejemplos para aclarar la comprensión de las habilidades clave.

Nivel Primaria: realizar sumas de forma estructurada
La tarea 25 + 7 requiere algo más que contar paso a paso. Se demuestra un sólido sentido de las operaciones cuando el alumnado reconoce las relaciones parte-parte-todo (por ejemplo, 25 y 7 como partes de un todo), descompone los números de forma flexible (por ejemplo, 7 = 5 + 2) y se basa en la siguiente decena (por ejemplo, 25 + 5 = 30; luego +2 = 32). Aquí, los conceptos (valor posicional, igualdad), las competencias (cálculo flexible, procedimiento justificado) y la habilidad resultante (suma estructurada) funcionan conjuntamente. Si falta esta destreza clave, el siguiente «nivel», rangos numéricos más amplios o estrategias más eficientes, sigue siendo difícil de alcanzar.

Nivel ESO: gestión de la ampliación de los dominios numéricos
Un sentido seguro de las operaciones con números naturales (descomposición, operaciones inversas, valor posicional y referencias en la recta numérica) es un requisito previo para transferir procedimientos a decimales y fracciones (por ejemplo, suma/resta, redondeo, estimación) y superar los obstáculos epistemológicos que implica el aprendizaje de conceptos matemáticos (Brousseau, 1997). Las lagunas en estas destrezas clave suelen conducir a un trabajo procedimental sin comprensión, lo que a su vez dificulta el acceso a las expresiones algebraicas, las ecuaciones y las relaciones funcionales. Esto ilustra el carácter predictivo de las habilidades aritméticas clave para las exigencias algebraicas.

La destreza clave de la comprensión se integra en las pruebas para representar los requisitos previos necesarios para el siguiente paso de aprendizaje, y

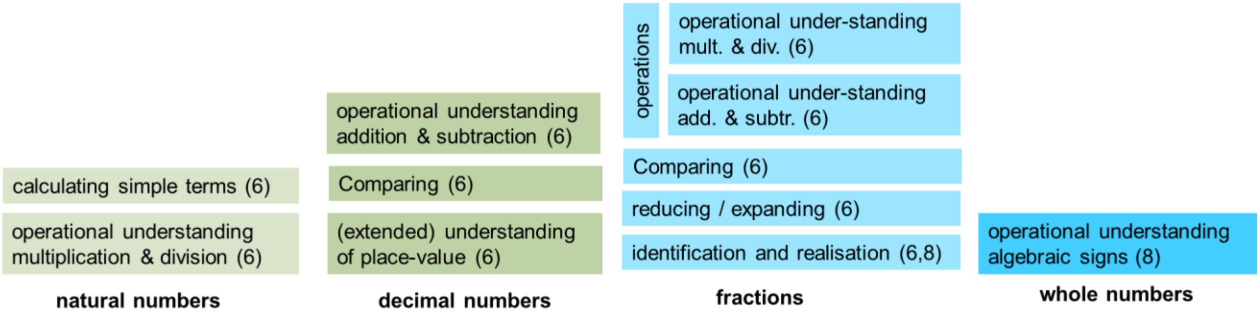
- son próximas al contenido y, por lo tanto, observables con tareas breves, y
- ofrecen al profesorado una primera orientación estructurada sobre qué alumnado puede necesitar más pasos de diagnóstico y dónde se puede dirigir el apoyo. El objetivo no es asignar etiquetas, sino revelar los requisitos previos fundamentales de forma temprana, de modo que el aprendizaje posterior pueda continuar sobre una base estable.

Según DiToM, el desarrollo de las destrezas clave es un proceso continuo a lo largo del aprendizaje, ya que son esenciales para permitir nuevos conocimientos. Por ello, es fundamental identificar y cubrir los requisitos previos que falten a los alumnos de manera temprana.

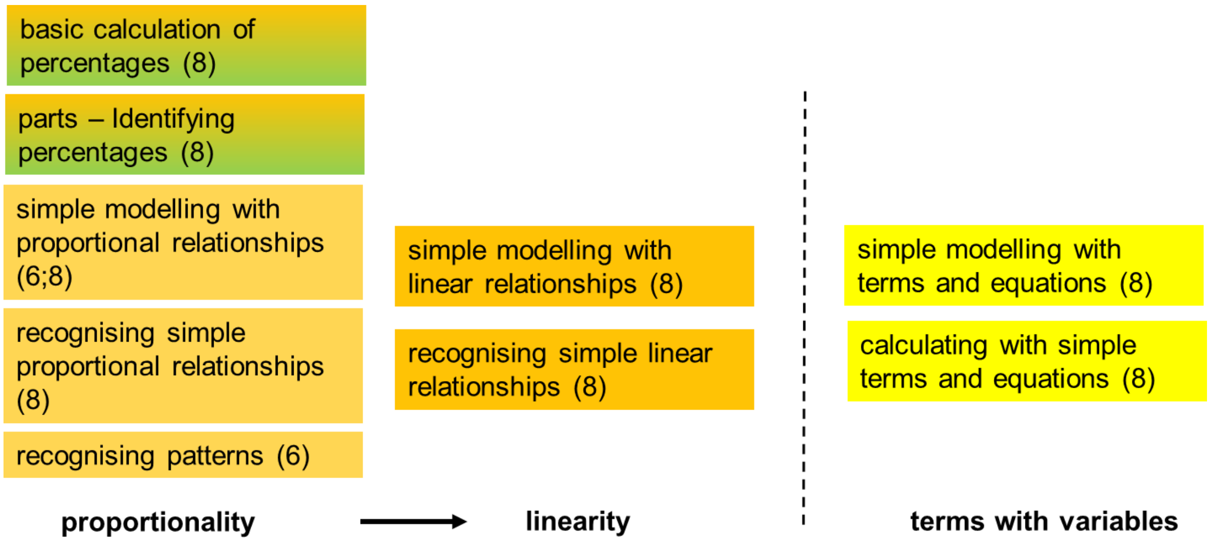
III. Estructura de las pruebas screening 6+ y 8+

La estructura de las pruebas en DiToM se basa en las áreas de contenido de aritmética y álgebra y se tiene en cuenta la estructura jerárquica de las áreas de contenido. La construcción de cada prueba se centró en el área del desarrollo y la ampliación del rango numérico en el sentido de un cálculo técnico, en la medida en que los procedimientos de cálculo se llevan a cabo de forma no algorítmica y algorítmica sobre la base de una comprensión fundamental. El diagrama muestra la estructura de la prueba en estas áreas de contenido para los grados 6+ y 8+.

La prueba para el grado 6+ se basa en los componentes básicos del grado 4+, que se centran en los números naturales, y esta área está más diferenciada. Si los alumnos tienen dificultades considerables en el área de los números naturales en el grado 6+, se recomienda utilizar la prueba para el grado 4+.



En el área de álgebra o preálgebra, se evalúa la comprensión estructural de estructuras matemáticas simples en aplicaciones matemáticas internas y externas bajo el aspecto de la proporcionalidad y la linealidad. Del mismo modo, en el área de términos con números o variables en diferentes direcciones en situaciones de aplicación básica, así como para la comprensión de términos, en la medida en que forma parte de una comprensión básica.



IV. Realización de la prueba screening DiToM

Explique el propósito de la prueba al alumnado y tranquilícelo.

- La prueba no se califica.
- Permite hacer un balance de lo que sabe y lo que no sabe el alumnado, para que luego se puedan sugerir ejercicios adecuados. Por lo tanto, es especialmente importante que el alumnado trabaje de manera individual.
- Hay que hacer hincapié en la importancia de completar los ejercicios. Cuantas más preguntas responda el alumnado, más fácil será identificar sus conocimientos, habilidades y dificultades, y ayudar a superarlas.
- También se puede decir que es la primera vez que se utiliza esta prueba y que las personas que la han diseñado quieren saber si es adecuada.

Estructura de la prueba

- La prueba se divide en tres partes, cada una de las cuales consta de varios ejercicios.
- Todos los ejercicios son independientes entre sí.

Duración: se estima una duración máxima para cada parte.

- Prueba de grado 6+, máximo 45 minutos: 15 para preálgebra, 10 para proporcionalidad y 20 para aritmética.
- Examen de grado 8+, máximo 40 minutos: 15 para preálgebra, 10 para proporcionalidad, 15 para aritmética.

Es importante indicar al alumnado la duración de cada parte antes de realizar la prueba, y que el profesorado recogerá la prueba del alumnado que no haya terminado, por motivos de equidad entre los alumnos y alumnas.

Formato de los ejercicios

- Ejercicios abiertos: hay espacio para responder (ya sea con frases o con un número).
- Ejercicios cerrados (preguntas de opción múltiple): se proponen varias respuestas y el alumno debe responder eligiendo solo una. Indique al alumnado que, si decide cambiar su respuesta de opción múltiple, debe escribir «No» junto a la primera respuesta y «Sí» junto a la nueva.

Cómo responder

- No se permiten calculadoras.
- El alumnado puede utilizar cualquier parte de la página que haya quedado en blanco como borrador, en particular para anotar sus cálculos.
- El alumnado puede realizar las tres partes por orden, a su propio ritmo. Los alumnos que hayan completado una parte de la prueba deben esperar a que el profesor les dé instrucciones para continuar con la siguiente parte.

Solicitar ayuda a los alumnos durante la prueba

- Si se solicita ayuda al profesorado, este no dará ninguna indicación que pueda orientar la respuesta a las preguntas. El objetivo es identificar las dificultades del alumnado.

V. Presentación de las tareas

Tarea 1.1: Multiplicación y división

Encuentra los números que faltan.

a) 3 · 42 = 126   c) 54 : 9 = 6

b) 172 = 4 · 43   d) 81 : 3 = 27

Solución

a) Primera solución: El número que falta puede interpretarse como 126 dividido por 3. Al calcular el cociente 126/3, se obtiene la respuesta 42.
   Segunda solución: Obsérvese que120 = 3 x 40 y126 = 120 + 6. Queda 6 = 3 x 2. El resultado 126 se obtiene introduciendo 40 + 2 = 42.
b) Primera solución: El número que falta puede interpretarse como el resultado de dividir 172 entre 4. Al calcular el cociente 172/4, se obtiene la respuesta 43.
   Segunda solución: Obsérvese que160 = 4 x 40 y172 = 160 + 12. Queda12 = 4 x 3. El resultado 172 se obtiene introduciendo 40 + 3 = 43.
c) El número que falta puede interpretarse como el resultado de 54 dividido por 6, o como el número que completa la igualdad 6 x ___ 54 . Recordando datos numéricos, se obtiene la respuesta 9.
d) Primera solución: El número que falta es 3 veces mayor que 27, es decir,3 x 27 = 81.
   Segunda solución: Al probar con 90 se obtiene el cociente 30, que es 3 mayor que 27. El cociente 3 se obtiene introduciendo 9. La respuesta 27 se obtiene introduciendo $90 - 9 = 81$.

Destreza clave evaluada con esta tarea

Esta tarea se centra en la comprensión del alumnado de la relación estructural entre la multiplicación y la división. En los cuatro subelementos, se pide al alumnado que encuentre un número que falta en una tarea que implica la multiplicación o la división, como completar «3 x ___= 126» o «172 = 4 x __». Para resolver estos elementos correctamente, el alumnado debe identificar los números conocidos y desconocidos y pasar con flexibilidad de una operación a otra. Debe interpretar las ecuaciones no solo como indicaciones para el cálculo, sino como expresiones de una relación parte-todo en la que una cantidad es el resultado de multiplicar o dividir otras dos, y reconocer el signo de igualdad como una relación de equivalencia. Esta flexibilidad operativa es un sello distintivo de una comprensión más profunda de la aritmética y es esencial para acceder a contenidos matemáticos más avanzados.

Encuentra los números que faltan.

a) 3 × ___ = 126   c) 54 : ___ = 6

b) 172 = 4 × ___   d) ___ : 3 = 27

¿Por qué es esta habilidad una destreza clave?

Reconocer y trabajar con fluidez con la relación inversa entre la multiplicación y la división es una habilidad clave para el aprendizaje matemático posterior. Esta comprensión constituye la base para trabajar con razones, proporciones, expresiones algebraicas y relaciones funcionales. Según el marco DiToM, estas habilidades se clasifican como destrezas matemáticas clave porque su ausencia puede dificultar o incluso bloquear el progreso del aprendizaje futuro. El alumnado que puede interpretar una ecuación de forma estructural —entendiendo, por ejemplo, que «3 x _ = 126» implica «126 : 3»— demuestra algo más que la memorización de procedimientos: están participando en el razonamiento matemático. El desarrollo temprano de esta capacidad garantiza que el alumnado esté mejor preparado para manejar representaciones simbólicas y resolver problemas de varios pasos en matemáticas de secundaria.

¿Qué tipo de errores y otras señales de alerta se pueden esperar con esta tarea?

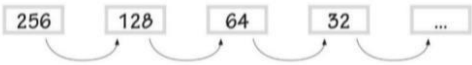
Los estudiantes que aún no han interiorizado la relación entre la multiplicación y la división suelen mostrar conceptos erróneos frecuentes. Un error común es interpretar todas las ecuaciones como si requirieran una multiplicación directa, incluso cuando se necesita la operación inversa. Por ejemplo, cuando se encuentran con «172 = 4 x __», el alumnado puede calcular erróneamente «172 x 4» en lugar de dividir. Otros pueden adivinar basándose en el recuerdo mecánico de datos, sin tener en cuenta la estructura de la ecuación. Malinterpretar la función del signo igual —como una indicación para calcular en lugar de un símbolo de equivalencia— también puede dar lugar a respuestas procedimentales pero incorrectas. En algunos casos, el alumnado intenta métodos escritos complejos (como la división larga, por ejemplo, 126 = 120 + 6 = 3 x 40 + 3 x 2 o 126 : 3 = 40 + 2 = 42), cuando sería más adecuado comprender estratégicamente las relaciones numéricas. Estos comportamientos pueden indicar una falta de conciencia estructural, así como una fluidez conceptual limitada.

¿Qué tipo de apoyo se podría brindar a los alumnos y alumnas que muestran deficiencias en esta tarea?

Es importante conectar explícitamente los datos numéricos relacionados (por ejemplo, «6 x 4 = 24», «24 : 4 = 6» y «24 : 6 = 4») para resaltar la reversibilidad de las operaciones. Animar al alumnado a verbalizar su razonamiento, por ejemplo, preguntándoles «¿Cuál es el número que, multiplicado por 4, da 172?», favorece la interiorización. Por último, se debe practicar la variación de la posición de la incógnita (al principio, en medio o al final de la ecuación) para profundizar en la comprensión flexible de la estructura de la ecuación. El uso de modelos visuales (matrices, diagramas) ayuda a los estudiantes a comprender las estructuras de la multiplicación y la división al hacer visible la composición y descomposición de cantidades.

Tarea 1.2: Patrones numéricos e identificación de reglas

¿Cuál es la regla que se puede utilizar para continuar esta secuencia de números?



a) Restar 32

b) Restar 128

c) Dividir por 4

d) Dividir por 2

Solución

El alumnado puede empezar comprobando qué opciones son posiblemente correctas probando las operaciones propuestas con cualquiera de los tres primeros números. Por ejemplo, con 256:

$256 - 32 = 224$ (no es igual a 128, por lo que esta opción no puede ser correcta)

$256 - 128 = 128$ (encaja en la secuencia)

$256 : 4 = 64$ (no es igual a 128, por lo que esta opción no puede ser correcta)

$256 : 2 = 128$ (encaja en la secuencia)

Probando la segunda y cuarta opciones (correctas hasta ahora) con 128:

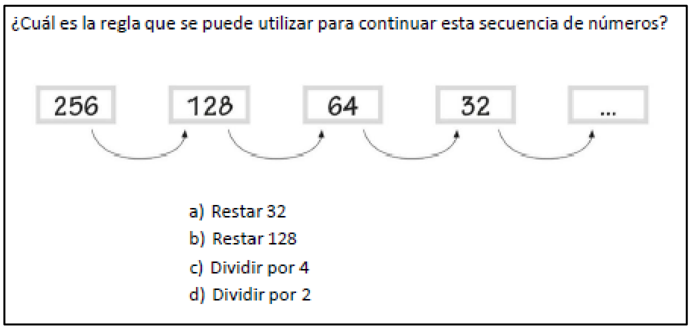
128 – 128 = 0 y 128 : 2 = 64. Solo el último cálculo encaja en la secuencia. La única opción restante (división por 2) se confirma con el tercer número 64, calculando 64 : 2 = 32.

Alternativamente, los alumnos pueden empezar restando y dividiendo pares de números adyacentes:

$256 - 128 = 128\,,\qquad 128 - 64 = 64\,,\ 64 - 32 = 32$

$256 : 128 = 2 \qquad 128 : 64 = 2 \qquad 64 : 32 = 2$

Destreza clave evaluada con esta tarea



Esta tarea evalúa la capacidad del alumnado para identificar y describir la regla subyacente en una secuencia numérica. El ejemplo específico —256, 128, 64, 32, ...— requiere reconocer una progresión geométrica en la que cada número es el resultado de dividir el anterior por dos. La tarea presenta opciones de respuesta múltiple, lo que lleva al alumnado a decidir qué regla (por ejemplo, «restar 32» o «dividir por 2») explica correctamente el patrón. Por lo tanto, la habilidad fundamental que se evalúa es la capacidad para reconocer estructuras multiplicativas. Esto implica más que el conocimiento procedimental: requiere el reconocimiento de patrones, el razonamiento estructural y el pensamiento algebraico temprano.

¿Por qué es esta habilidad una destreza clave?

La capacidad de reconocer regularidades en patrones numéricos es una destreza matemática clave porque constituye la base de conceptos más avanzados, como las funciones, el álgebra y el razonamiento proporcional. El alumnado que puede discernir reglas en secuencias está mejor preparado para realizar generalizaciones y representaciones simbólicas más adelante. Según investigaciones en educación matemática (por ejemplo, Kieran, 2018; Radford, 2013), el reconocimiento de patrones favorece el desarrollo de una comprensión relacional de los números y las operaciones. Dentro del marco DiToM, la identificación de la estructura numérica se considera esencial para navegar por la creciente abstracción de las matemáticas de secundaria. Además, la comprensión de las secuencias geométricas, como la reducción a la mitad, también sienta una base importante para interpretar las relaciones exponenciales, un concepto que se encuentra en cursos posteriores.

¿Qué tipo de errores y otras señales de alerta se pueden esperar con esta tarea?

Un error frecuente en esta tarea es interpretar la secuencia como aditiva en lugar de multiplicativa. El alumnado puede suponer que los números disminuyen en una cantidad fija y seleccionar «restar 32» porque la diferencia entre 64 y 32 se ajusta a este patrón, aunque no se aplique de forma coherente a los pasos anteriores. Estos errores revelan un sesgo lineal, que es común cuando el alumnado no está familiarizado con el cambio geométrico. Otros aestudiantes pueden adivinar sin comprobar el patrón en varios términos, lo que demuestra un razonamiento poco sistemático. Además, si aún no ven la división como la inversa de la multiplicación, es posible que no reconozcan «dividir por 2» como una estructura recurrente. Estos patrones de error sugieren un concepto frágil o poco desarrollado de la estructura y la secuencia operativas.

¿Qué tipo de apoyo se podría brindar a los alumnos y alumnas que muestran deficiencias en esta tarea?

Para ayudar a los estudiantes con dificultades para reconocer patrones numéricos, se recomienda emplear tareas que contrasten relaciones aditivas y multiplicativas, utilizar ayudas visuales y actividades donde generen sus propias secuencias. Fomentar el razonamiento en voz alta desarrolla la metacognición, y conectar estos patrones con contextos reales hace que los conceptos abstractos, como la progresión geométrica, sean más tangibles. Así, el profesorado debe animar al alumnado a razonar en voz alta, por ejemplo, «¿Cómo ha cambiado el número de 256 a 128?», Con el tiempo, conectar estos patrones con contextos del mundo real (por ejemplo, doblar papel, duplicar bacterias) puede reforzar el concepto de progresión geométrica y hacer que los patrones abstractos sean más tangibles.

Tarea 1.3: Jerarquía de las operaciones (reglas de prioridad)

Calcular:

20 $\quad 14 + 2 \times 3 =$ __

Solución

Ten en cuenta que la multiplicación tiene prioridad sobre la suma.

Primero calcula el producto2 x 3 = 6, luego suma14 + 6 = 20 . En un solo cálculo:

$$14 + 2 \cdot 3 = 14 + 6 = 20$$

Destreza clave evaluada con esta tarea

Calcular:

14 + 2 × 3 = __________

Esta tarea evalúa la comprensión del alumnado sobre el orden convencional de las operaciones, concretamente la prioridad de la multiplicación sobre la suma. Los estudiantes deben interpretar y evaluar correctamente la expresión «14 + 2 · 3», aplicando la regla de que la multiplicación se realiza antes que la suma. Esto requiere no solo fluidez en los procedimientos, sino también conciencia de la estructura jerárquica de las operaciones aritméticas. Por lo tanto, la tarea va más allá del conocimiento factual y evalúa la capacidad del alumnado para analizar y estructurar correctamente las expresiones numéricas, un paso crucial hacia la alfabetización algebraica.

¿Por qué es esta habilidad una destreza clave?

Comprender el orden de las operaciones es un requisito previo fundamental para trabajar con expresiones aritméticas más complejas y, más adelante, con expresiones y ecuaciones algebraicas. Dentro del marco DiToM, la capacidad de procesar expresiones de varios pasos de acuerdo con las convenciones matemáticas se considera una destreza clave, ya que es la base del razonamiento simbólico y la capacidad general para resolver problemas. Los estudiantes que interiorizan estas reglas pueden interpretar expresiones de forma fiable, manipular términos con confianza y evitar errores comunes en los cálculos. Esta destreza no solo es esencial en el contexto de las operaciones numéricas, sino que también es directamente transferible al trabajo con expresiones y fórmulas, la resolución de ecuaciones y el análisis de funciones en cursos posteriores.

¿Qué tipo de errores y otras señales de alerta se pueden esperar con esta tarea?

Un error típico en esta tarea es evaluar la expresión de izquierda a derecha sin respetar la jerarquía de operaciones, es decir, sumar primero 14 y 2 para obtener 16 y luego multiplicar por 3 para obtener 48. Este error revela un sesgo de cálculo lineal y una falta de comprensión conceptual de la precedencia de las operaciones. Otra señal de alerta es la vacilación o la dependencia excesiva de estrategias de razonamiento informales («haz primero lo que está escrito»), lo que sugiere que el alumnado puede estar aplicando el orden de lectura cotidiano en lugar de la estructura matemática. Algunos estudiantes también pueden intentar insertar paréntesis de forma inadecuada, lo que demuestra inseguridad sobre cómo se organizan las expresiones. Incluso si el alumnado llega a la respuesta correcta, el uso del «ensayo y error» o las conjeturas en lugar del razonamiento estructurado puede ser una señal de lagunas conceptuales.

¿Qué tipo de apoyo se podría brindar a los alumnos y alumnas que muestran deficiencias en esta tarea?

El apoyo específico debe comenzar por hacer visible la estructura de las expresiones, por ejemplo, mediante el uso de códigos de colores, corchetes o modelos visuales que muestren las agrupaciones. El profesorado puede modelar la evaluación de las expresiones paso a paso y animar al alumnado a verbalizar su razonamiento:
«Primero, hago 2 por 3 porque la multiplicación tiene prioridad sobre la suma. Luego sumo 14». Del mismo modo, las representaciones icónicas de los dos métodos de cálculo pueden ayudar a distinguir y comprender las prioridades de cálculo. Practicar con una variedad de expresiones, incluidas aquellas con y sin paréntesis, puede ayudar a aclarar cuándo

y por qué es importante el orden. El alumnado también se beneficia de explorar estrategias incorrectas y discutir por qué conducen a resultados erróneos. Con el tiempo, la exposición regular y la reflexión estructurada ayudan a interiorizar las reglas y refuerzan la confianza en el manejo de cálculos de varios pasos.

Tarea 1.4: Traducción de texto escrito a expresiones matemáticas

Tom sigue las instrucciones:

Sumar el número 4 al 5.

Multiplicar el resultado por 8.

¿Qué cálculo puede utilizar Tom para obtener el resultado?

a) 5 + 4 x 8

b) (5 + 4) x 8

c) 5 + (4 x 8)

d) 5 x 8 + 4

Solución

El resultado de la primera instrucción *Sumar el número 4 al 5 y* se puede expresar como5 + 4 .

La segunda instrucción *« Multiplicar el resultado por 8»* requiere que toda la expresión «5 + 4 » se multiplique por 8. No basta con escribir «5 + 4 x 8 », ya que esa expresión solo multiplica 4 por 8. Los paréntesis alrededor de «5 + 4 » garantizan que ambos términos se multipliquen por 8. La respuesta es «(5 + 4) x 8 ».

Dado que la suma y la multiplicación son operaciones conmutativas, las siguientes respuestas también son correctas:

(4 + 5) x 8, 8 x (5 + 4), 8 x (4 + 5)

Si el alumno da una de estas respuestas, debe identificar la segunda opción, «(5 + 4) x 8 », como una respuesta equivalente.

Destreza clave evaluada con esta tarea

Tom tiene que seguir las instrucciones siguientes:

Sumar el número 4 al 5.
Multiplicar el resultado por 8.

¿Qué cálculo puede utilizar Tom para obtener el resultado?

a) $5 + 4 \times 8$
b) $(5 + 4) \times 8$
c) $5 + (4 \times 8)$
d) $5 \times 8 + 4$

Esta tarea evalúa la capacidad de los estudiantes para interpretar una secuencia verbal breve que describe dos operaciones consecutivas —primero una suma y luego una multiplicación— y traducir esta secuencia en una expresión simbólica. No se espera que el alumnado calcule el resultado, sino que identifique la representación matemática correcta de las instrucciones, ya que las instrucciones verbales y la expresión numérica correspondiente no son semánticamente congruentes (Vergnaud, 1983). Esto requiere reconocer el orden de las operaciones implícito en el lenguaje y construir un término en consecuencia (por ejemplo, (4 + 5) x 8). La habilidad fundamental que se evalúa es la traducción del lenguaje natural a la notación formal, incluido el uso de paréntesis para preservar la estructura computacional correcta y las prioridades operativas.

¿Por qué es esta habilidad una destreza clave?

La capacidad de representar simbólicamente la información verbal o contextual es fundamental para la alfabetización matemática. En el marco DiToM, esta habilidad se considera clave porque permite a los estudiantes moverse entre diferentes modos de representación —verbal, simbólica, icónica y operativa— y manejar la estructura sens (Kieran y Martínez-Hernández, 2022) de las expresiones numéricas. Esta destreza de traducción es esencial no solo en aritmética, sino también en álgebra, donde los estudiantes se enfrentan regularmente a situaciones que requieren construir o interpretar expresiones a partir de problemas verbales, diagramas o situaciones cotidianas. El dominio temprano de esta destreza favorece el desarrollo del pensamiento funcional, la flexibilidad para resolver problemas y la fluidez en el trabajo con modelos matemáticos.

¿Qué tipo de errores y otras señales de advertencia pueden esperarse en esta tarea?

Un error común en esta tarea es construir la expresión en el orden incorrecto, como interpretar «4 se suma a 5» como «4 + 5» (lo que es matemáticamente correcto), pero luego aplicar la multiplicación de forma incorrecta: ya sea «4 + (5 x

8)» o «4 x 5 + 8». Esto refleja la dificultad para identificar la secuencia de operaciones implícita en el lenguaje. Algunos estudiantes pueden ignorar la necesidad de utilizar paréntesis y escribir «4 + 5 · 8», lo que da lugar a un orden incorrecto de las operaciones si se calcula. Otros pueden centrarse solo en la operación final y escribir «9 · 8 = 72» como respuesta, omitiendo la tarea real de traducción simbólica. Estos patrones sugieren lagunas en la comprensión de los procedimientos y dificultades para coordinar el lenguaje con la estructura matemática.

¿Qué tipo de apoyo se podría brindar a los alumnos y alumnas que muestran deficiencias en esta tarea?

Para apoyar al alumnado en esta área, es importante animarlo a desarrollar una comprensión integral de la secuencia de cálculos, a fin de tener en cuenta la estructura del cálculo y el orden de las operaciones. El profesorado puede modelar cómo «construir un término» a partir de una frase hablada y utilizar organizadores visuales (como árboles de operaciones o diagramas de flujo) para ayudar al alumnado a secuenciar las operaciones correctamente. Hacer hincapié en la función de los paréntesis en la agrupación de operaciones puede evitar interpretaciones erróneas. Las rutinas del aula que implican «traducir de un lado a otro» entre el lenguaje y los símbolos también pueden reforzar la flexibilidad representativa del alumnado. Con el tiempo, animar al alumnado a decir lo que significa la expresión (por ejemplo, «primero sumo, luego multiplico») ayuda a consolidar su comprensión de la estructura simbólica.

Tarea 1.5: Equiparar cantidades

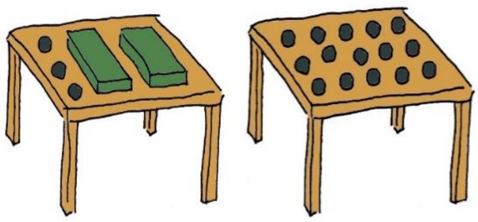
La imagen muestra canicas y cajas, colocadas sobre dos mesas.

Cada caja contiene el mismo número de canicas.

Hay el mismo número de canicas en cada mesa.

¿Cuántas canicas hay en cada caja?

Mesa 1 Mesa 2

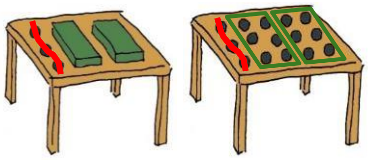


Respuesta: **6**

Solución:

Esta tarea se puede resolver con métodos formales o informales.

Una solución consiste en retirar primero tres canicas de cada mesa y agrupar las 12 canicas restantes de la mesa 2 en dos grupos con el mismo número de canicas (en este caso, 6 canicas).



Este razonamiento puede respaldarse con cálculos15 − 3 = 12 y 12: 2 = 6.

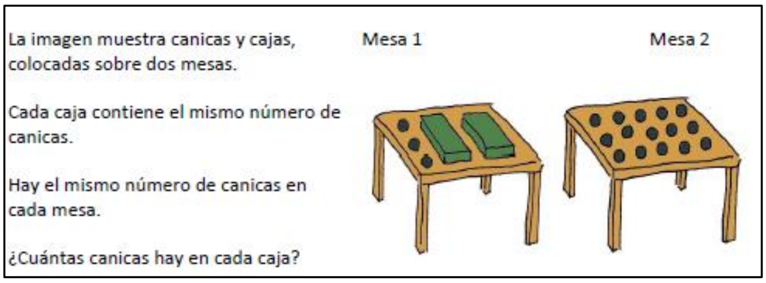
Tenga en cuenta que el proceso de eliminación y agrupación se puede realizar en la imagen, mentalmente o mediante cálculos.

Una segunda solución puede basarse en probar valores hasta que haya el mismo número de canicas en ambas mesas. Esta prueba se puede realizar como un cálculo mental, pero también se puede resumir en una tabla:

Número de canicas en una caja	3	4	5	6
Total en la mesa 1	9	11	13	1515
Total en la mesa 2	15	15	15	

Una tercera solución formal puede basarse en introducir x como el número de canicas en una caja y representar simbólicamente la situación del problema con la ecuación $2x + 3 = 15$, que puede resolverse mediante métodos algebraicos. Sin embargo, es poco probable que los alumnos de 6.º curso o superiores utilicen esta solución.

Destreza clave evaluada con esta tarea



Esta tarea evalúa la capacidad del alumnado para interpretar una representación visual de una situación de parte-todo que implica igualdad. Se muestra al alumnado dos mesas, cada una de las cuales contiene una combinación de canicas visibles y cajas que ocultan el mismo número desconocido de canicas. El requisito clave es deducir el número de canicas que hay en una caja basándose en la información de que ambas mesas contienen el mismo número total de canicas. Esto significa que el alumnado debe equiparar mentalmente las cantidades de ambos lados y resolver la incógnita, una forma de resolución informal de ecuaciones basada en el equilibrio visual. Por lo tanto, la tarea se centra en el razonamiento estructural, el pensamiento algebraico temprano y la capacidad de interpretar la equivalencia en un contexto no simbólico.

¿Por qué es esta habilidad una destreza clave?

Interpretar la igualdad es un precursor fundamental del razonamiento algebraico. Dentro del marco DiToM, se identifica como una destreza clave porque aprovecha la comprensión del alumnado de la equivalencia y la sustitución, ideas centrales tanto en aritmética como en álgebra temprana. Al razonar que dos configuraciones diferentes deben ser, de hecho, iguales en total, el alumnado practica el pensamiento relacional en lugar de basarse únicamente en el cálculo directo (Radford, 2014). Esta habilidad favorece la competencia posterior en la resolución de ecuaciones, el equilibrio de transformaciones y el trabajo con cantidades desconocidas en forma simbólica. Además, estas tareas no simbólicas proporcionan un puente esencial para el alumnado que aún está desarrollando su confianza con las representaciones formales, ya que permiten el acceso conceptual a través de la estructura visual.

¿Qué tipo de errores y otras señales de alerta se pueden esperar con esta tarea?

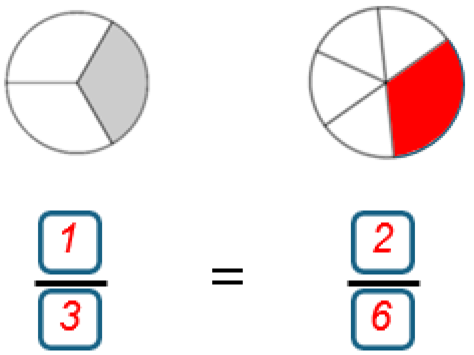
El alumnado que tiene dificultades con esta tarea puede no reconocer la equivalencia entre los dos lados. Un error típico es intentar contar solo las canicas visibles, ignorando la cantidad oculta en las cajas o asumiendo un valor fijo (por ejemplo, «cada caja debe tener 10 canicas»). Algunos estudiantes pueden reconocer la necesidad de equilibrio, pero calculan mal o alinean incorrectamente su razonamiento, tal vez adivinando el número en una caja sin comprobar que da lugar a totales iguales. Otro grupo de estudiantes podría tratar la imagen visual de forma descriptiva en lugar de analítica, informando de lo que es visible sin intentar inferir lo desconocido. Estos comportamientos sugieren lagunas en la comprensión estructural, en particular en la interpretación de lo desconocido como cantidades que deben determinarse a partir de inferencias realizadas a partir de las cantidades conocidas.

¿Qué tipo de apoyo se podría brindar a los alumnos y alumnas que muestran deficiencias en esta tarea?

El alumnado se beneficia del trabajo con materiales prácticos que concretan el concepto de equivalencia, por ejemplo, para avanzar a los siguientes grados con números relativos. Dibujar y etiquetar diagramas en los que el alumnado escribe ecuaciones como «3 + x = 7» puede ayudar a tender un puente entre el razonamiento visual y la representación simbólica. Además, la práctica repetida en la identificación de conjuntos iguales, pero de composición diferente, refuerza la noción de equivalencia y favorece el paso del razonamiento aditivo al pensamiento funcional temprano. Como siempre, se debe animar al alumnado a explicar su razonamiento y a comprobar si los valores propuestos mantienen el equilibrio.

Tarea 2.1: Representación e interpretación de fracciones equivalentes

Sombrea el segundo círculo de manera que represente una fracción equivalente a la parte coloreada del primer círculo y escribe las fracciones equivalentes correspondientes.



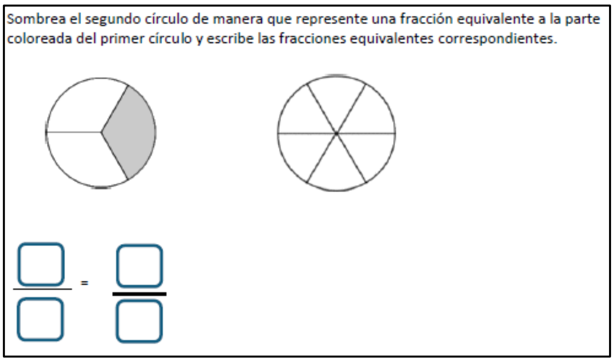
Solución

La parte sombreada del círculo de la derecha debe tener la misma proporción entre la parte y el todo que el círculo de la izquierda. Dado que la proporción entre la parte y el todo en el círculo de la izquierda es 1:3, la proporción en el círculo de la derecha debe ser 2:6. (Esta conclusión se puede motivar de forma intuitiva: si dividimos un pastel redondo en seis trozos en lugar de tres, necesitamos el doble de trozos para obtener la misma cantidad de pastel).

También podemos proceder formalmente extendiendo la fracción de la siguiente manera:

$$\mathbf{\frac{1}{3} = \frac{1\ x\ 2}{3\ x\ 2} = \frac{2}{6}}$$

Destreza clave evaluada con esta tarea



Esta tarea se centra en la capacidad de reconocer y construir fracciones equivalentes a través de dos aspectos representativos: primero en formato visual (sombreando partes de un círculo) y luego en notación simbólica (escribiendo una igualdad fraccionaria). En la primera parte, se pide al alumnado que complete una representación visual sombreando la misma proporción de un círculo que se muestra en un modelo dado. En la segunda parte, se espera que exprese esta relación como una identidad matemática utilizando fracciones. La habilidad fundamental que se evalúa es la coordinación entre la comprensión visual de la parte y el todo y su representación formal como fracciones numéricas propias equivalentes.

¿Por qué es esta habilidad una destreza clave?

Comprender las fracciones equivalentes es la piedra angular de la comprensión de los números racionales y, por lo tanto, constituye una destreza matemática clave. Constituye la base conceptual para las operaciones con fracciones, el razonamiento proporcional, los conceptos de razón y la equivalencia algebraica. Dentro del marco DiToM, reconocer que fracciones de aspecto diferente pueden representar la misma cantidad se considera crucial para desarrollar la flexibilidad en el pensamiento numérico. El alumnado debe comprender que una fracción propia no solo representa un número, sino también una relación entre una parte y un todo, y que esta relación permanece constante incluso cuando se escalan tanto el numerador como el denominador. Las tareas que combinan los niveles visual y simbólico promueven una comprensión más profunda y facilitan la transición al razonamiento abstracto en matemáticas posteriores.

¿Qué tipo de errores y otras señales de alerta se pueden esperar con esta tarea?

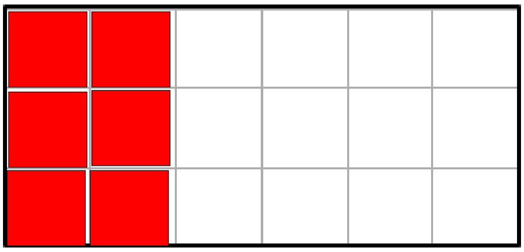
El alumnado puede sombrear un número incorrecto de partes en el segundo círculo, por ejemplo, haciendo coincidir el número de una pieza sombreada en lugar del tamaño proporcional. Esto revela una estrategia de conteo en lugar de un pensamiento relacional, lo que indica que se ve el numerador como un número estático en lugar de como parte de un todo. En la segunda parte, el alumnado puede copiar la fracción dada sin transformarla, escribir fracciones no equivalentes, pero de aspecto similar (por ejemplo, duplicando solo el numerador) o confundir el orden del numerador y el denominador. Algunos pueden omitir por completo el signo de igualdad, lo que sugiere incertidumbre sobre las convenciones de notación de fracciones. Estas son señales de advertencia de una comprensión conceptual frágil y una experiencia limitada en la conexión de representaciones visuales y simbólicas.

¿Qué tipo de apoyo se podría brindar a los alumnos y alumnas que muestran deficiencias en esta tarea?

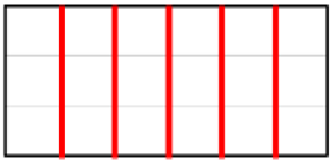
Para desarrollar una comprensión sólida de las fracciones equivalentes, el alumnado debe trabajar regularmente con manipulativos y modelos visuales, como círculos, barras o fichas fraccionarias, para ver y crear partes iguales en diferentes divisiones. Se debe hacer hincapié en identificar cuántas partes de cuántas componen la misma proporción y cómo cambian en paralelo tanto el número de partes sombreadas como el número total de partes. El profesorado puede guiar al alumnado para que verbalice el proceso de escalado, por ejemplo: «He duplicado el número de partes y he duplicado el número de partes sombreadas». Esto favorece la interiorización de la estructura multiplicativa que subyace a la equivalencia. Las actividades puente —por ejemplo, sombrear, luego escribir y luego explicar verbalmente— son especialmente eficaces para estabilizar el vínculo entre las imágenes visuales y las ecuaciones fraccionarias formales.

Tarea 2.2: Sombreado de una fracción dada de un rectángulo

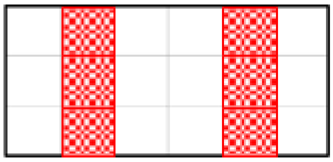
Colorea $\frac{2}{6}$ del rectángulo:



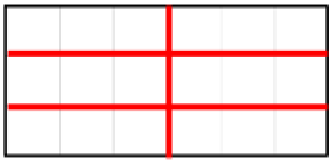
La solución presentada anteriormente se basa en dividir el rectángulo en seis partes iguales (columnas) y seleccionar dos de ellas.



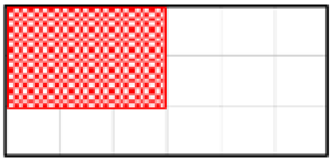
Otra respuesta correcta:



Por supuesto, se pueden sombrear dos de estas seis partes para obtener una solución correcta. Hay otras formas de dividir el rectángulo en seis partes iguales, por ejemplo:

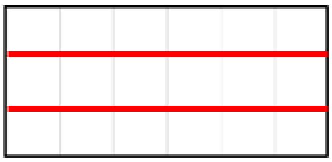


Otra respuesta correcta:

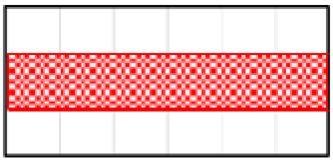


Cualquier respuesta que sombree 6 cuadrados pequeños del total de 18 cuadrados pequeños es correcta.

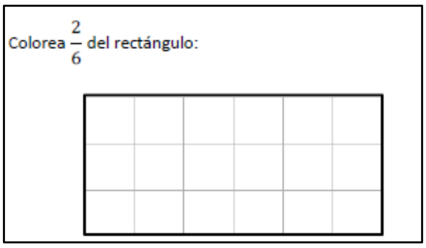
También es correcto interpretar «$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$» (tres de cada cinco) y sombrear una pieza de cada tres.



Otra respuesta correcta:



Destreza clave evaluada con esta tarea



Esta tarea evalúa la capacidad del alumnado para construir una representación visual de una fracción dada sombreando una parte específica de un área rectangular. Se espera que el alumnado identifique el número correcto de partes iguales y sombree el número de partes correspondientes al numerador, al tiempo que reconoce que el número total de partes corresponde al denominador. Esto requiere interpretar las fracciones como operadores sobre áreas, es decir, utilizar una fracción para definir qué parte de una región completa se está considerando. La tarea exige una subdivisión precisa, una estimación espacial y un razonamiento proporcional.

¿Por qué es esta habilidad una destreza clave?

Construir una fracción visualmente es un paso clave en el desarrollo del pensamiento relacional y proporcional, así como en el puente entre el conocimiento informal y formal de las fracciones. Dentro del marco DiToM, esta habilidad se considera fundamental porque apoya la comprensión posterior de la equivalencia, la suma y la resta de fracciones y el razonamiento relacionado con el área en geometría. Representar fracciones en un modelo visual, como un rectángulo, también refuerza la comprensión de que las fracciones no se refieren simplemente a partes discretas (como canicas o fichas), sino también a cantidades y áreas continuas. El alumnado que puede pasar con flexibilidad de la notación fraccionaria a los modelos visuales tiende a desarrollar conceptos numéricos más profundos y conectados, y está mejor preparado para el trabajo abstracto en álgebra y más allá.

¿Qué tipo de errores y otras señales de advertencia se pueden esperar con esta tarea?

Entre los errores más comunes se encuentra el sombreado de un número incorrecto de partes, a menudo debido a un recuento erróneo o a una identificación incorrecta del número total de subdivisiones. El alumnado puede sombrear partes que no son iguales en tamaño, infringiendo así el requisito de que las partes fraccionarias deben tener la misma área. Algunos estudiantes pueden sombrear al azar sin establecer ninguna relación con la fracción dada, lo que indica una falta de conceptualización de la parte y el todo. En algunos casos, los estudiantes ignoran el denominador y simplemente cuentan las unidades (por ejemplo, sombreando dos partes independientemente del número total que haya). Estos patrones apuntan a dificultades para coordinar la fracción simbólica con el modelo visual y para comprender la restricción estructural que define una fracción válida.

¿Qué tipo de apoyo se podría brindar a los alumnos y alumnas que muestran deficiencias en esta tarea?

El apoyo específico debe incluir actividades prácticas con tiras de fracciones, plegado de papel o modelos de área basados en cuadrículas. Se debe animar al alumnado a dividir primero las formas en partes iguales antes de aplicar el operador (por ejemplo, «sombrear 3 de 4 partes iguales»). Es útil modelar, por ejemplo, rectángulos en los que las partes no son iguales, para aclarar qué se considera una representación válida de una fracción. Relacionar las tareas de sombreado con la escritura simbólica y la explicación verbal («Lo dividí en 6 partes iguales y sombreé 4 de ellas, por lo que son cuatro sextos») favorece la integración de las representaciones. Con el tiempo, el alumnado debe practicar con diferentes formas y orientaciones para generalizar su comprensión más allá de formatos específicos.

Tarea 2.3: Razonamiento proporcional con cantidades y precios

2 kg de patatas cuestan 5 €. Calcula el precio de 6 kg de patatas.

15

Solución

El estudiante que reconoce que 6 kg es 3 veces más que 2 kg puede concluir que 6 kg debería costar 3 veces más que 2 kg. Por lo tanto, el precio de 6 kg es3 x 5 = 15 €.

Este razonamiento proporcional puede apoyarse en una notación semiformal como

2 kg⟶ 5 €   **x 3**   2 kg⟶ 5 €

6 kg⟶ ? €   6 kg⟶ ? €

O, más formalmente:

$\frac{5}{2} = \frac{?}{6}$ (o $\frac{?}{6} = \frac{5}{2}$ o $\frac{6}{2} = \frac{?}{5}$ o $\frac{?}{5} = \frac{6}{2}$

Destreza clave evaluada con esta tarea

2 kg de patatas cuestan 5 €. Calcula el precio de 6 kg de patatas.

Esta tarea evalúa la capacidad del alumnado para aplicar el razonamiento multiplicativo a la resolución de un problema proporcional que implica precios y cantidades. El contexto —determinar el precio de 6 kilogramos de patatas sabiendo que 2 kilogramos cuestan 5 euros— requiere que los estudiantes reconozcan y mantengan una relación constante entre la cantidad y el precio. Para resolverlo correctamente, el alumnado debe escalar el par cantidad-precio por un factor de 3 o calcular la tasa unitaria (precio por kilogramo) y luego multiplicar. La habilidad que se evalúa es la comprensión y aplicación de estructuras multiplicativas en relaciones funcionales, que es una base fundamental de los problemas de ratio, proporción y porcentaje en matemáticas posteriores.

¿Por qué es esta habilidad una destreza clave?

El razonamiento proporcional es una de las destrezas matemáticas clave más importantes en la educación secundaria. Según el marco DiToM, la capacidad de identificar y trabajar con relaciones constantes —como «2 kg→ 5 €» escalado a «6 kg → ? €»— es fundamental no solo en aritmética, sino también en álgebra, comprensión funcional, geometría, ciencias y resolución de problemas cotidianos. El alumnado que domina estas relaciones multiplicativas puede generalizarlas en diferentes contextos y elegir con flexibilidad estrategias eficaces (por ejemplo, duplicar, dividir por la mitad, razonar con el precio unitario). Además, la transición de la comparación aditiva a la multiplicativa refleja un salto evolutivo en la comprensión matemática que sustenta el aprendizaje futuro de las funciones lineales y los modelos proporcionales.

¿Qué tipo de errores y otras señales de alerta se pueden esperar con esta tarea?

Entre los errores más comunes se encuentra el razonamiento aditivo, como suponer que, si 2 kg cuestan 5 euros, entonces 6 kg deben costar 5 + 4 = 9 euros. Esto refleja una incapacidad para comprender la naturaleza multiplicativa de la relación. Algunos estudiantes pueden multiplicar directamente 5 por 6 (lo que da como resultado 30 €), interpretando erróneamente el significado de los números involucrados. Otros pueden tener dificultades para coordinar las unidades, mezclando kilogramos y euros, o simplemente adivinar basándose en estimaciones. Estos errores apuntan a lagunas en la comprensión estructural y, posiblemente, a una experiencia limitada con el razonamiento basado en ratios. El alumnado que no articula su estrategia o que se basa en el método de prueba y error suele carecer de un modelo conceptual fiable para la proporcionalidad.

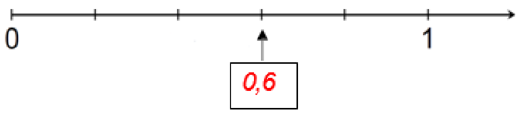
¿Qué tipo de apoyo se podría brindar a los alumnos y alumnas que muestran deficiencias en esta tarea?

El alumnado se beneficia de problemas ricos en contexto que involucran dinero, recetas o medidas, donde las estructuras proporcionales se dan de forma natural. El profesorado debe modelar explícitamente estrategias como el razonamiento por unidad de medida («Si 2 kg cuestan 5 €, entonces 1 kg cuesta 2,50 €...») o el escalado basado en factores («6 kg son 3 veces 2 kg, por lo que el precio es 3 x 5 €»). Las ayudas visuales, como las rectas numéricas dobles, las tablas de ratios y los modelos de barras, pueden concretar la relación multiplicativa. También es útil contrastar las estrategias aditivas y multiplicativas en los debates en clase para resaltar sus diferentes implicaciones. Animar al alumnado a explicar y justificar su razonamiento favorece el crecimiento metacognitivo y ayuda a profundizar en la comprensión de las estructuras proporcionales.

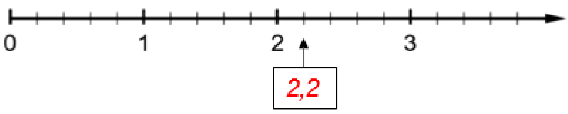
Tarea 3.1: Representación simbólica de números en una recta numérica

Escribe en la casilla un número que represente la posición en la recta numérica.

a)



b)



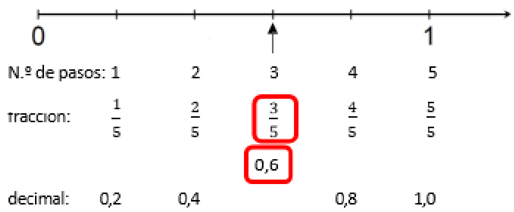
Solución

Dos estrategias posibles:

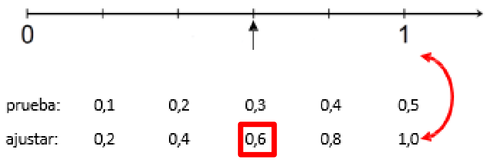
1) Contar el número de pasos (o subintervalos) de 0 a 1;

2) Probar secuencias de números decimales (o fracciones) de 0 a 1.

Primera solución a): En detalle, la primera estrategia se puede implementar contando 5 pasos de 0 a 1.

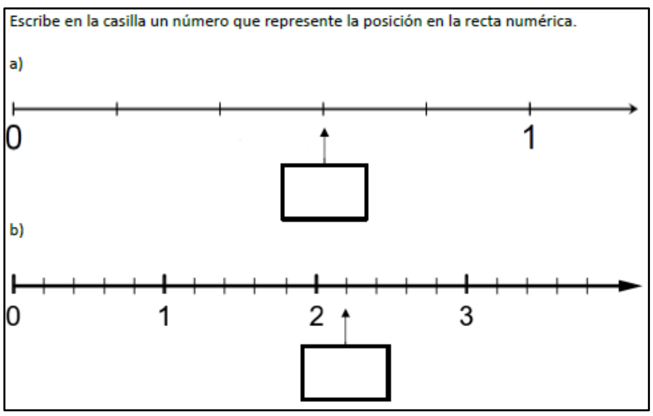


Segunda solución: Una posibilidad es probar 0,1 para la primera posición a la derecha de 0. Esta elección de 0,1 da como resultado 0,5, que no encaja con 1 en la recta numérica. Cambiar a 0,2 da como resultado 1,0, que encaja con 1 en la recta numérica.



Destreza clave evaluada con esta tarea

Esta tarea se centra en la capacidad del alumnado para interpretar una recta numérica segmentada en subintervalos y colocar una fracción o un número decimal de forma adecuada en función de su posición relativa entre 0 y 1 (o más allá). Los estudiantes deben analizar las divisiones de la recta, determinar la unidad e identificar la fracción o el número decimal correcto que marca un punto determinado. Esto requiere comprender las fracciones como números con magnitudes, no solo como relaciones entre partes y el todo. La tarea también evalúa la capacidad de coordinar representaciones simbólicas y espaciales de números racionales.



¿Por qué es esta habilidad una destreza clave?

Ser capaz de localizar fracciones en una recta numérica es una destreza matemática clave, ya que refleja un cambio en la comprensión de las fracciones, que pasan de ser partes de objetos a números en una escala continua. Esta interpretación espacial de las fracciones sienta las bases para comparar, ordenar y calcular con fracciones. Dentro del marco DiToM, la estimación y el posicionamiento en la recta numérica se consideran indicadores sólidos de claridad conceptual. Las investigaciones (por ejemplo, Siegler y Booth, 2004; Treppo y van den Heuvel-Panhuizen, 2014) muestran que los estudiantes que comprenden la estructura métrica de la recta numérica tienen más probabilidades de tener éxito en aritmética, álgebra y geometría en el futuro. Además, la recta numérica ofrece un modelo unificado que facilita la transición entre números naturales, fracciones, decimales y números negativos.

¿Qué tipo de errores y otras señales de alerta se pueden esperar con esta tarea?

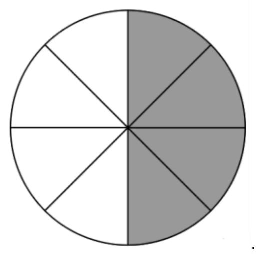
El alumnado suele basarse en el recuento de marcas, suponiendo una subdivisión decimal de la unidad, en lugar de razonar sobre el tamaño fraccionario. Por ejemplo, puede malinterpretar cuatro divisiones como «cuartos», independientemente de si el todo se subdivide en partes iguales o no. Otro error común es colocar la fracción en una ubicación incorrecta, por ejemplo, colocar 3/4 en 2/3 debido a la falta de razonamiento proporcional. Algunos estudiantes pueden adivinar basándose en la intuición visual en lugar de calcular el denominador implícito en las divisiones. En variaciones más avanzadas, el alumnado puede tener dificultades cuando la recta numérica no comienza en 0 o cuando se trata de fracciones impropias o números mixtos. Estos errores apuntan a una integración insuficiente de la magnitud, la notación y la estructura. También hay estudiantes que dan un número decimal incorrecto como solución. Consulte la tarea 3.4, que aborda esta cuestión.

¿Qué tipo de apoyo se podría brindar a los alumnos y alumnas que muestran deficiencias en esta tarea?

Para apoyar al alumnado, es esencial dedicar tiempo a construir un modelo mental sólido de la recta numérica que incluya fracciones y números decimales. El profesorado puede utilizar herramientas interactivas, como tiras plegables, reglas de fracciones y rectas numéricas digitales, para desarrollar el razonamiento proporcional. La enseñanza explícita debe centrarse en cómo determinar el tamaño de un intervalo unitario, cómo contar los pasos fraccionarios y cómo relacionar estos pasos con el símbolo escrito. Comparar diferentes fracciones en la misma recta ayuda a reforzar la magnitud relacional y la equivalencia. Las actividades de transición, como dibujar fracciones en una recta y luego escribirlas en forma simbólica y viceversa, o establecer relaciones con representaciones icónicas ya conocidas por el alumnado (por ejemplo, diagramas circulares), fortalecen las conexiones representativas. La verbalización frecuente («Este es el tercer segmento de cuatro, por lo que es tres cuartos») promueve la internalización de la estructura.

Tarea 3.2: Elección de la fracción correcta de un círculo sombreado

¿Qué parte del círculo está coloreada?



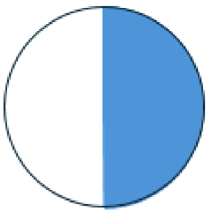
a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{8}$ c) $\frac{8}{4}$ d) $\frac{1}{4}$

Solución

En la imagen original, hay 4 partes sombreadas y un total de 8 partes. La fracción correspondiente es

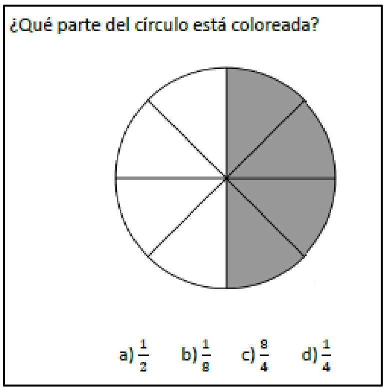
$$\frac{4}{8} = \frac{4/4}{8/4} = \frac{1}{2} \qquad (\text{o } \frac{4}{8} = \frac{4x1}{4x2} = \frac{1}{2})$$

Otra posibilidad es ignorar las líneas e interpretar la parte sombreada como la *mitad* del círculo completo.



Destreza clave evaluada con esta tarea

Esta tarea se centra en la capacidad del alumnado para identificar una fracción basándose en una representación visual de la parte y el todo y seleccionar la representación simbólica correcta de esa fracción entre varias opciones. En la imagen, un círculo está dividido en ocho partes iguales y cuatro de ellas están sombreadas. La fracción correcta es, por lo tanto, 4/8, que se simplifica a 1/2. Sin embargo, el alumnado no solo debe reconocer esta relación, sino también distinguirla de distractores plausibles pero incorrectos, como 1/4, 1/8 o incluso 8/4. La habilidad fundamental que se evalúa es la coordinación entre la comprensión visual, numérica y estructural de las fracciones.



¿Por qué es esta habilidad una destreza clave?

Ser capaz de interpretar fracciones a partir de modelos visuales y de asignarlas correctamente a representaciones simbólicas es una habilidad fundamental para la comprensión de los números racionales. Dentro del marco DiToM, esta tarea aprovecha el concepto de las fracciones como relaciones entre una parte y el todo, que es fundamental para conceptos más avanzados como la equivalencia, las operaciones con fracciones y la proporcionalidad. Es importante destacar que la tarea introduce una trampa conceptual: el distractor 8/4 es numéricamente mayor que el todo, a pesar de coincidir con los números correctos (solo que invertidos). Reconocer esta discrepancia requiere algo más que un recuento visual; exige una comprensión de la estructura, la escala y el significado de las fracciones.

¿Qué tipo de errores y otras señales de advertencia se pueden esperar con esta tarea?

El distractor 8/4 es especialmente atractivo porque incluye los dos números presentes en la imagen (8 partes en total y 4 sombreadas), pero invierte su orden. Seleccionar 1/8 o 1/4 podría indicar una interpretación errónea de la proporción, ya sea contando solo las sombreadas o sin tener en cuenta el total. Algunos estudiantes pueden recurrir por defecto a «fracciones de referencia» familiares, como 1/4 o 1/2, sin analizarlas. Todas estas son señales de advertencia de una comprensión frágil o incompleta de las fracciones, especialmente en lo que respecta a la coordinación entre la parte y el todo y la interpretación simbólica.

¿Qué tipo de apoyo se podría brindar a los alumnos y alumnas que muestran deficiencias en esta tarea?

El alumnado se beneficia de actividades prácticas en las que se utilizan círculos de fracciones o formas de papel plegables, en las que pueden dividir físicamente y sombrear partes de un todo. El profesorado debe hacer hincapié en las funciones del numerador y el denominador mediante una verbalización coherente («4 partes sombreadas de 8 partes iguales, eso son 4 octavos... y lo escribo así: 4/8»). La práctica de emparejar modelos visuales con múltiples expresiones fraccionarias, incluidas las mayores que 1, puede ayudar al alumnado a distinguir entre fracciones propias, impropias y equivalentes. Animar al alumnado a explicar por qué una fracción como 8/4 no puede representar menos que un todo fomenta el pensamiento crítico y favorece la conciencia estructural. Destacar los errores comunes mediante un debate guiado (por ejemplo, «¿Por qué alguien podría pensar que 8/4 es correcto?») puede ayudar a poner de manifiesto los conceptos erróneos y abordarlos directamente.

Tarea 3.3: Comparación de una fracción impropia con números naturales

Marca con una cruz todos los números naturales que sean mayores que $\frac{10}{3}$

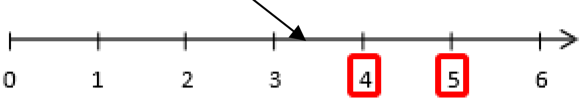
a) 2 b) 3 c) 4 d) 5

Solución

Primera solución: Comience calculando $\frac{\mathbf{10}}{\mathbf{3}} = 3{,}33\ldots$ o descomponiendo $\frac{\mathbf{10}}{\mathbf{3}} = 3 + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} = 3\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$

Entre los números 2, 3, 4, 5, solo 4 y 5 son mayores que 3,33.

Segunda solución: Coloca $\frac{\mathbf{10}}{\mathbf{3}}$ en una recta numérica (como fracción, como número mixto $3\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$, o como 3,33…) y compara con las posiciones 2, 3, 4, 5.



Destreza clave evaluada con esta tarea

Marca con una cruz todos los números naturales que sean mayores que $\frac{10}{3}$

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5

Esta tarea evalúa la capacidad del alumnado para comparar una fracción no unitaria mayor que 1 (10/3) con varios números naturales. Los estudiantes deben identificar todos los números del conjunto {2, 3, 4, 5} que son mayores que 10/3. Dado que 10/3 es igual a aproximadamente 3,33, la solución correcta es seleccionar tanto el 4 como el 5. Es importante destacar que la respuesta solo se considera correcta si se seleccionan ambos valores y no se marca ninguna de las opciones incorrectas.

¿Por qué es esta habilidad una destreza clave?

Comparar fracciones con números enteros es una destreza matemática clave porque vincula los sistemas de números racionales y enteros, lo que favorece el desarrollo de un modelo coherente de recta numérica. Dentro del marco DiToM, esta comparación promueve la comprensión de la magnitud de las fracciones, la estimación y la transición entre representaciones fraccionarias y decimales o mixtas. La capacidad de determinar si una fracción es mayor o menor que un número entero es esencial para desarrollar flexibilidad en la interpretación de la información numérica. Además, esta habilidad favorece el éxito en tareas relacionadas con la medición, la escala y la interpretación de funciones, áreas en las que se producen habitualmente comparaciones racionales- naturales.

¿Qué tipo de errores y otras señales de alerta se pueden esperar con esta tarea?

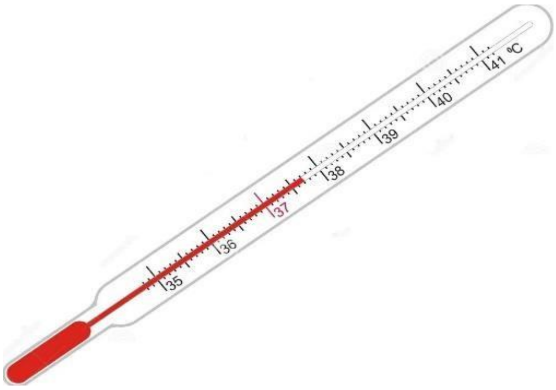
El alumnado puede convertir 10/3 de forma incorrecta, por ejemplo, estimándolo como 2 o 5, lo que lleva a decisiones inexactas a la hora de marcar la casilla. Un error común es centrarse solo en el numerador y el denominador de forma aislada, por ejemplo, suponiendo que 10/3 es menor que 4 porque «3 es mayor que 1». Algunos estudiantes pueden marcar solo una opción correcta (por ejemplo, 4), al malinterpretar las instrucciones de la tarea o no reconocer que existe más de un valor correcto. Otros pueden marcar todos los números mayores que 3, adivinando basándose en un recuerdo parcial. Estos errores revelan una falta de fluidez con las fracciones impropias y dificultades para razonar con flexibilidad entre representaciones (por ejemplo, convertir 10/3 en 3⅓).

¿Qué tipo de apoyo se podría brindar a los alumnos y alumnas que muestran deficiencias en esta tarea?

El alumnado debe practicar regularmente la comparación de fracciones impropias con números naturales y números mixtos. Las herramientas visuales, como las rectas numéricas o las tiras de fracciones, pueden ayudar a aclarar dónde se encuentra una fracción determinada en relación con los números de referencia. El profesorado puede guiar al alumnado para que exprese las fracciones impropias en forma de números mixtos (por ejemplo, 10/3 = 3⅓) para facilitar la estimación y la comparación. Los ejercicios que implican razonamiento verbal («¿Es 10/3 más o menos que 4?») y tareas de explicación (por ejemplo, justificar por qué 3 no es correcto) ayudan a promover la claridad conceptual. En las tareas con múltiples respuestas correctas, también es útil hacer hincapié en la alfabetización de la tarea: cómo interpretar las estructuras de «marcar todas las que correspondan» de forma precisa y completa.

Tarea 3.4: Lectura de números decimales en un termómetro

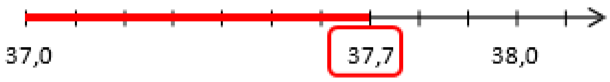
Anota la temperatura medida en °C.



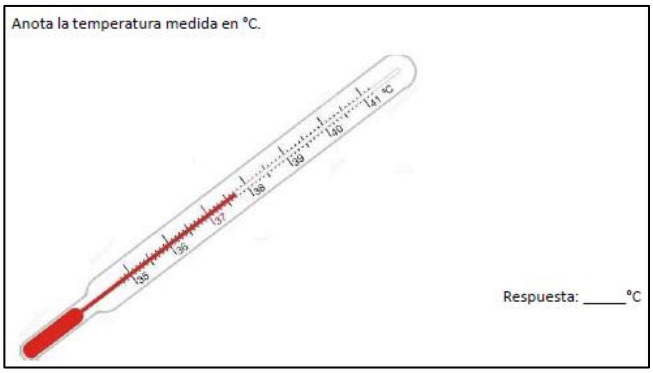
Respuesta: __**37,7**_°C

Solución

El termómetro está graduado en decimales (unidad grado Celsius). Comparando con una recta numérica:



Destreza clave evaluada con esta tarea



Esta tarea examina la capacidad del alumnado para interpretar y leer números decimales en una escala graduada, integrada en un contexto de la vida real (un termómetro). Al alumnado se le muestra un termómetro analógico con marcas en grados Celsius y una columna de líquido rojo que sube hasta un nivel específico, concretamente 37,7°C. Para resolver la tarea correctamente, los estudiantes deben determinar la lectura de la temperatura a partir de la representación visual dada y expresarla en notación decimal. La habilidad fundamental que se evalúa aquí es la capacidad de leer e interpretar con precisión cantidades decimales en una escala métrica continua en un entorno familiar.

¿Por qué es esta habilidad una destreza clave?

Dentro del marco DiToM, la interpretación de medidas en escalas lineales es una destreza matemática clave fundamental, ya que integra la comprensión del valor posicional, la estimación de magnitudes y el razonamiento métrico. La interpretación de números decimales es esencial para contextos cotidianos (temperatura, dinero, longitud, peso) y sienta las bases para seguir trabajando con porcentajes, fracciones y funciones. Además, la lectura de escalas en contextos auténticos favorece la alfabetización matemática, ya que el alumnado debe comprender las herramientas de medición graduadas en la salud, la ciencia o la vida cotidiana. La conexión entre la información visual y la representación numérica refuerza la capacidad del alumnado para relacionar cantidades continuas con precisión simbólica.

¿Qué tipo de errores y otras señales de alerta se pueden esperar con esta tarea?

Algunos estudiantes pueden tener dificultades para interpretar las subdivisiones finas de la escala, especialmente si los incrementos son décimas (0,1 pasos) en lugar de números enteros. Los errores más comunes incluyen redondear al número entero más cercano (por ejemplo, 38 en lugar de 37,7), omitir el decimal (escribir 377) o contar mal las marcas debido a la falta de familiaridad con la estructura decimal. Otros pueden confundir el valor de cada intervalo, por ejemplo, suponiendo que la distancia entre 37 y 38 se divide en 5 partes iguales en lugar de 10. Estos errores suelen deberse a una comprensión insuficiente del valor posicional, a una fluidez limitada con los números decimales o a la falta de experiencia en la interpretación de escalas de medición.

¿Qué tipo de apoyo se podría brindar a los alumnos y alumnas que muestran deficiencias en esta tarea?

El alumnado se beneficia de la exposición repetida a instrumentos de medición escalados, como termómetros, reglas y cilindros graduados. El profesorado debe mostrar cómo analizar los intervalos, determinar el tamaño del incremento y contar hacia adelante utilizando décimas. El uso de láminas transparentes o marcadores de colores para seguir los niveles de líquido puede mejorar la alineación visual. Los estudiantes también deben practicar la lectura y la escritura de números decimales en situaciones ricas en contexto, con el apoyo de modelos de rectas numéricas que tienden un puente entre el pensamiento simbólico y el visual. Hacer hincapié en la precisión del lenguaje («tres décimas más que treinta y siete») puede ayudar a reforzar la claridad conceptual en torno al valor posicional de los decimales. Por último, las tareas específicas que comparan valores como 37,7, 37,8 y 38,0 pueden mejorar la discriminación decimal detallada.

Tarea 3.5: Comparar números decimales

¿Cuál de estos números es el más grande?

a) 3,33 b) 3,303 c) 3,03 d) 3,3

Solución

Los cuatro números se pueden representar como

3,33 = 3 + 0,3 + 0,03

3,303 = 3 + 0,3 + 0,003

3,03 = 3 + 0,03

3,3 = 3 + 0,3

Al comparar pares de números, debería resultar obvio que el número más grande es 3,33.

Destreza clave evaluada con esta tarea

¿Cuál de estos números es el más grande?
a) 3,33 b) 3,303 c) 3,03 d) 3,3

Esta tarea evalúa la capacidad del alumnado para comparar y ordenar números decimales, especialmente aquellos que tienen valores similares y varían en el número de dígitos decimales. El alumnado debe determinar cuál de los cuatro decimales dados (3,33; 3,303; 3,03; 3,3) es el mayor. Para hacerlo correctamente, debe comprender que el valor posicional determina la magnitud, y no el número de dígitos o la «longitud» aparente del decimal. La tarea evalúa específicamente la precisión en la interpretación en una recta numérica hasta el tercer y cuarto decimal, y la capacidad de reconocer que 3,33 es mayor que 3,303, a pesar de que este último tiene más dígitos.

¿Por qué es esta habilidad una destreza clave?

Comparar números decimales es una destreza matemática clave, ya que refleja la comprensión del valor posicional en el sistema decimal más allá de los números enteros. Dentro del marco DiToM, esto es crucial para desarrollar la competencia en estimación, medición y aritmética del mundo real (por ejemplo, precios, interpretación de datos). La comparación de números decimales también sirve de apoyo para el trabajo posterior con porcentajes, álgebra y contextos científicos. La tarea refleja cómo razona el alumnado sobre la magnitud relativa y si se centra en el valor más que en la estructura superficial, como el recuento de dígitos o la longitud visual de los segmentos. Esta habilidad es fundamental tanto para el cálculo mental como para la interpretación de datos tabulares o gráficos.

¿Qué tipo de errores y otras señales de alerta se pueden esperar con esta tarea?

Un error frecuente es pensar que los números decimales más largos son más grandes; por ejemplo, los estudiantes pueden elegir incorrectamente 3,303 porque tiene tres dígitos decimales. Otros pueden comparar solo el primer dígito después del decimal y descuidar la estructura posterior (por ejemplo, suponiendo que 3,3 es mayor que 3,33 porque 3,3 solo tiene un decimal). Algunos estudiantes pueden no estar seguros de cómo alinear los decimales y comparar mentalmente los valores, especialmente cuando tienen longitudes diferentes. Estas respuestas indican una comprensión frágil del valor de los decimales, en particular a la hora de distinguir entre décimas, centésimas y milésimas. Los errores también pueden reflejar la inexperiencia en las comparaciones de decimales cercanos, en las que fallan las estrategias intuitivas.

¿Qué tipo de apoyo se podría brindar a los alumnos y alumnas que muestran deficiencias en esta tarea?

Se debe animar al alumnado a utilizar tablas de valor posicional para alinear y comparar los decimales dígito por dígito. El profesorado puede modelar estrategias como añadir ceros al final para igualar el número de decimales (por ejemplo, comparar 3,300, 3,330, 3,303). Las herramientas visuales, como las rectas numéricas con marcadores decimales, los modelos de bloques de base diez para decimales o las representaciones en cuadrículas, pueden ayudar a consolidar la comprensión de la magnitud. Es fundamental hacer hincapié en el valor por encima de la apariencia («Más dígitos no significa más valor»). La práctica con tareas de razonamiento («¿Cuál es mayor y por qué?») y juegos de estimación que impliquen dinero, longitud o volumen puede ayudar a integrar la comparación de decimales en contextos significativos.

Tarea 3.6: Cálculo de los sumandos que faltan en sumas con números decimales

Determina el número que falta.

a) 1,8 + _**3,5**__= 5,3

b)__**1,49**_+ 0,51 = 2

Solución

Una solución para la parte a): El número que falta se puede interpretar con una resta.

____= 5,3 − 1,8 = 3,5

Otra solución para la parte a): Utilizar la estrategia de rellenar parcialmente (completar), por pasos.

Paso 1: 1,8 + 3 = 4,8

Paso 2: 4,8 + 0,2 + 0,3 = 5,3

Respuesta, basada en los pasos 1 y 2: 3 + 0,2 + 0,3 = 3,5.

(La segunda estrategia se utiliza habitualmente en el cálculo mental, pero es menos frecuente con la notación formal

Una solución para la parte b): El número que falta se puede interpretar con una resta.

____= 2 − 0,51 = 1 + 1 − 0,51 = 1 + 0,49 = 1,49 (utiliza la propiedad numérica 0,49 + 0,51 = 1,00)

Una segunda solución, también basada en la resta, que no utiliza el dato numérico 0,49 + 0,51 = 1,00 :

____= 2 − 0,51 = 1 + 1 − 0,5 − 0,01 = 1 + 0,5 − 0,01 = 1 + 0,4 + 0,10 − 0,01 = 1,4 + 0,09 = 1,49

(La segunda solución se puede ejecutar con un algoritmo formal estándar para la resta, colocando el segundo número debajo del primero y haciendo uso del «préstamo»/«traspaso»).

Una tercera solución para b): Utilizar la estrategia de completar parcialmente, por pasos.

Paso 1: 0,49 + 0,51 = 1,00 (operación aritmética)

Paso 2: 1 + 1,00 = 2

Respuesta, basada en los pasos 1 y 2: 0,49 + 1 = 1,49.

Destreza clave evaluada con esta tarea

Esta tarea evalúa la capacidad del alumnado para resolver un sumando desconocido en una ecuación de suma decimal, aplicando su comprensión del valor posicional, la estructura de las ecuaciones y las operaciones inversas. En ambas partes, se presenta al alumnado una suma en la que falta un componente:

- En a), deben determinar qué hay que sumar a 1,8 para obtener 5,3.
- En b), deben determinar qué hay que sumar a 0,51 para obtener 2.

Esto requiere un razonamiento sustractivo (por ejemplo, 5,3 - 1,8) o una comprensión conceptual de la relación aditiva. La destreza clave aquí es la capacidad de aplicar con flexibilidad la estructura algebraica básica y la aritmética decimal.

Determina el número que falta.

a) 1,8 + _____= 5,3

b) _____+ 0,51 = 2

¿Por qué es esta habilidad una destreza clave?

Resolver incógnitas en ecuaciones numéricas es una destreza clave fundamental para tender un puente entre la aritmética y el álgebra. Dentro del marco DiToM, estas tareas se consideran razonamiento algebraico temprano: el alumnado debe tratar la ecuación como un todo y comprender el papel estructural de la incógnita. Además, trabajar con valores decimales refuerza la fluidez del alumnado con la estructura de base diez y favorece el éxito posterior en temas como la medición, las finanzas y el razonamiento proporcional. La capacidad de pasar de lo conocido a lo desconocido utilizando operaciones inversas refleja una comprensión operativa más profunda, reconociendo el signo de igualdad como una relación de equivalencia, y contribuye al desarrollo del sentido de las ecuaciones.

¿Qué tipo de errores y otras señales de advertencia se pueden esperar con esta tarea?

Algunos estudiantes pueden intentar adivinar en lugar de aplicar la resta, especialmente si no están seguros de cómo manejar el valor posicional decimal. Un error típico es la desalineación de los dígitos decimales (por ejemplo, tratar 1,8 como 18 u olvidar alinear las décimas). En la parte b), el alumnado puede confundir la posición de la incógnita y restar 0,51 de 0 en lugar de restarlo de 2. Otros pueden resolver la ecuación sumando en lugar de restando, o pueden escribir un resultado lógicamente incorrecto que «encaja» numéricamente, pero que no respeta la estructura decimal. Estos errores apuntan a lagunas en los procedimientos, inseguridad con los decimales o falta de habilidades para interpretar ecuaciones.

¿Qué tipo de apoyo se podría brindar a los alumnos y alumnas que muestran deficiencias en esta tarea?

Un apoyo eficaz incluye la práctica en la resolución de frases numéricas abiertas utilizando rectas numéricas decimales, modelos de barras o modelos de equilibrio de ecuaciones para visualizar las relaciones, así como aplicar estrategias de cálculo inteligentes. Se debe animar al alumnado a reescribir las ecuaciones utilizando la resta para aislar la incógnita y a estimar primero el resultado para desarrollar un sentido de la plausibilidad. Los ejercicios que se centran en alinear decimales y descomponer números pueden ayudar a desarrollar la fluidez con la aritmética decimal. Fomentar las explicaciones verbales («¿Qué añadirías a 1,8 para obtener 5,3?») refuerza el razonamiento y conecta la aritmética con la estructura algebraica.

Tarea 3.7: Realización de restas y multiplicaciones con números decimales

Calcular:

a) 23,5 – 1,12 = __**22,38**__

b) 6 × 2,5 = _**15**_

Solución

a) 23,5 − 1,12 = 22 + 0,50 − 0,12 = 22 + 0,38 = 22,38 (utiliza el dato numérico50 − 12 = 38)

La resta 50 − 12 puede calcularse «rellenando» 12 a 20 a 50: 50 − 12 = 8 + 30 = 38 . (El proceso de rellenar puede ilustrarse en una recta numérica).

b) 6 x 2,5 = 6 x 2 + 6 x 0,5 = 12 + 3 = 15

Mostrando explícitamente cómo se aplica la ley distributiva: 6 · 2,5 = 6 · (2 + 0,5) = 6 · 2 + 6 · 0,5 = 12 + 3 = 15

Comentario: El cálculo6 x 0,5 puede interpretarse como «6 mitades = 3 enteros» o, simbólicamente, como 6 x 0,5 = 3 x 2 x 0,5 = 3 x 1 = 3 (hecho numérico 2 x 0,5 = 1 «dos veces la mitad es igual a uno (entero)»).

Otra solución, también basada en la factorización6 = 3 x 2 : 6 x 2,5 = 3 x 2 x 2,5 = 3 x 5 = 15 (hecho numérico2 x 2,5 = 5)

Mostrando explícitamente cómo se aplica la ley asociativa: 6 x 2,5 = (3 x 2) x 2,5 = 3 x (2 x 2,5) = 3 x 5 = 15

Otra solución más, esta basada en la descomposición6 = 4 + 2 : 6 x 2,5 = 4 x 2,5 + 2 x 2,5 = 10 + 5 = 15

Mostrando explícitamente cómo se aplica la ley distributiva: 6 x 2,5 = (4 + 2) x 2,5 = 4 x 2,5 + 2 x 2,5 = 10 + 5 = 15

Destreza clave evaluada con esta tarea

Esta tarea evalúa la capacidad del alumnado para realizar con precisión operaciones aritméticas con números decimales. En la parte a), se les pide que calculen la diferencia entre 23,5 y 1,12. En la parte b), deben determinar el producto de 6 y 2,5. Ambos ejercicios evalúan la comprensión del valor posicional, la fluidez operativa y la precisión en el trabajo con números decimales, tanto en la alineación como en el cálculo. La tarea refleja habilidades rutinarias pero esenciales en el contexto del sistema decimal.

Calcular:

a) 23,5 – 1,12 =______

b) 6 × 2,5 =_______

¿Por qué es esta habilidad una destreza clave?

Realizar operaciones básicas con decimales es una destreza matemática fundamental, tal y como se define en el marco DiToM. No solo es esencial para el cálculo cotidiano (por ejemplo, manejar dinero, medidas o datos), sino que también sirve de apoyo para la generalización algebraica y el razonamiento proporcional. El cálculo decimal preciso sustenta muchos ámbitos matemáticos, como la geometría, la estadística y la resolución de problemas en contextos científicos. La capacidad de calcular con decimales refleja una profunda integración del conocimiento del valor posicional, el control algorítmico y las estrategias de estimación.

¿Qué tipo de errores y otras señales de alerta pueden esperarse en esta tarea?

Los errores comunes en la parte a) incluyen la desalineación de los decimales (por ejemplo, tratar 23,5 como 23,50 pero no alinearlo correctamente con 1,12), lo que da lugar a una resta incorrecta. El alumnado también puede restar dígitos de posiciones incorrectas o ignorar por completo el decimal. Algunos también pueden utilizar estrategias inadecuadas, como la suma repetida sin control estructural. Estos errores suelen indicar una comprensión deficiente del valor posicional, las propiedades de las operaciones o la posición de los decimales.

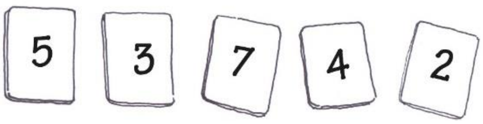
¿Qué tipo de apoyo se podría brindar a los alumnos y alumnas que muestran deficiencias en esta tarea?

El apoyo debe incluir la práctica estructurada de la alineación del valor posicional, especialmente con la resta entre decimales. El profesorado puede utilizar papel cuadriculado o tablas de valor posicional para ayudar al alumnado a alinear los dígitos correctamente. Las estrategias de estimación («¿La respuesta será alrededor de 22 o 10?») ayudan a desarrollar el sentido numérico y la percepción de la plausibilidad. En el caso de la multiplicación, el uso de modelos de área o representaciones con bloques de base diez puede ayudar a comprender conceptualmente la multiplicación por decimales. También es útil modelar tanto los algoritmos estándar como las estrategias de cálculo mental (por ejemplo, 6 x 2,5 = 6 x 2 + 6 x 0,5 = 15 o 6 x 2,5 = (3 x 2) x·2,5 = 3 x (2 x 2,5) = 3 x 5 = 15 (propiedad asociativa de la multiplicación)). El razonamiento verbal frecuente refuerza la comprensión del comportamiento de los decimales en las operaciones.

Tareas 3.8 y 3.9: Maximización del valor de una fracción eligiendo un numerador o denominador adecuado

Tarea 3.8

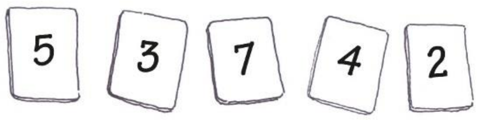
A continuación, hay 5 tarjetas, cada una con un número escrito en ella.



Elige la tarjeta adecuada para que el valor de la fracción sea el **mayor.**

Tarea 3.9

A continuación, hay 5 tarjetas, cada una con un número escrito en ella.



Elige la tarjeta adecuada para que el valor

Soluciones

La tarea 3.8 se puede resolver utilizando el principio

Si ponemos un número mayor en el numerador y mantenemos el mismo denominador, la fracción será mayor.*

Uno de los números 5, 3, 7, 4, 2 debe colocarse en el *numerador*. Dado que 7 es el *mayor* de estos números, la fracción más grande posible es 7/13.

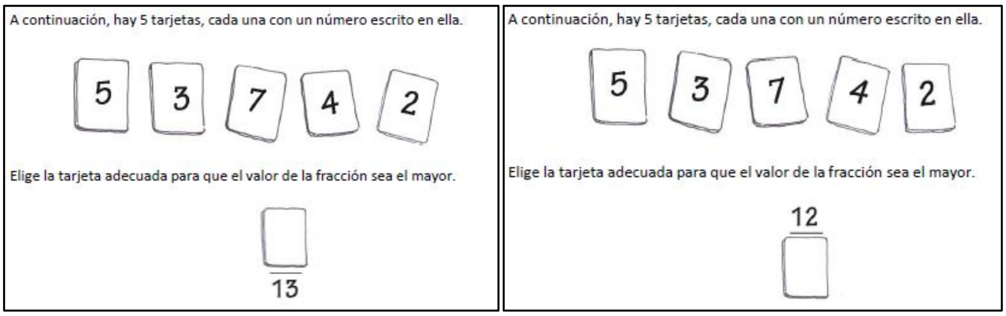
La tarea 3.9 se puede resolver utilizando el principio

Poner un número más pequeño en el denominador, manteniendo el mismo numerador, hace que la fracción sea más grande.*

Uno de los números 5, 3, 7, 4, 2 debe colocarse en el *denominador*. Dado que 2 es el *más pequeño* de estos números, la fracción más grande posible es 7/13.

* Solo consideramos fracciones en las que el numerador y el denominador son números enteros positivos.

Destreza clave evaluada con esta tarea



Esta tarea evalúa la capacidad del alumnado para razonar sobre la estructura de las fracciones y aplicar su comprensión para maximizar el valor de una fracción seleccionando el número más adecuado de entre un conjunto de opciones. A los estudiantes se les presentan varias tarjetas, cada una con un número diferente, y se les pide que inserten una de ellas en una estructura fraccionaria dada, de manera que el valor de la fracción resultante sea lo más grande posible. Normalmente, a la fracción le falta el numerador o el denominador, y el alumnado debe elegir el número que haga que el valor de la fracción sea mayor. Esto evalúa el razonamiento flexible con razones y magnitudes relativas.

¿Por qué es esta habilidad una destreza clave?

Comprender cómo los numeradores y denominadores afectan al tamaño de una fracción es una idea fundamental en el aprendizaje de las fracciones. Dentro del marco DiToM esta capacidad refleja una comprensión conceptual más profunda de la magnitud de las fracciones: cómo el aumento del numerador o la disminución del denominador afecta al valor total. También favorece el desarrollo del pensamiento relacional, en el que el alumnado piensa más allá de las características superficiales y, en su lugar, razona estructuralmente sobre las relaciones numéricas. Estos conocimientos son esenciales para el trabajo posterior con razones, proporciones, escalas y razonamiento algebraico.

¿Qué tipo de errores y otras señales de alerta se pueden esperar con esta tarea?

Un error común es seleccionar el número más grande disponible, independientemente de si se coloca en el numerador o en el denominador, bajo la falsa suposición de que «cuanto más grande, mejor». Esto indica una estrategia procedimental o superficial sin comprensión estructural. Otros pueden simplemente elegir al azar o confundir las funciones del numerador y el denominador, por ejemplo, maximizando el número en sí mismo en lugar del valor de la fracción resultante. Estos errores sugieren una comprensión frágil del comportamiento de las fracciones y una experiencia limitada en la comparación de fracciones no unitarias. El alumnado también puede malinterpretar el objetivo (por ejemplo, intentar acercarse lo más posible a 1 en lugar de maximizar el valor).

¿Qué tipo de apoyo se podría brindar a los alumnos y alumnas que muestran deficiencias en esta tarea?

Un apoyo eficaz incluye actividades prácticas con tiras de fracciones o rectas numéricas, en las que el alumnado manipula los numeradores y denominadores para observar cómo cambia el tamaño de la fracción. El profesorado puede modelar comparaciones como «3/4 frente a 3/5» o «4/7 frente a 5/7» para explorar cómo el numerador o el denominador influyen en la magnitud. Las tareas basadas en el debate («¿Cuál es mayor y por qué?») fomentan un razonamiento más profundo. Visualizar las fracciones en una recta numérica común o utilizar un software que muestre dinámicamente el tamaño de las fracciones también puede ayudar al alumnado a comprender estas relaciones. Con el tiempo, guiar a los estudiantes hacia generalizaciones («Un denominador más pequeño hace que una fracción sea más grande si el numerador es fijo») favorece la transferencia y la abstracción.

VI. Evaluación científica

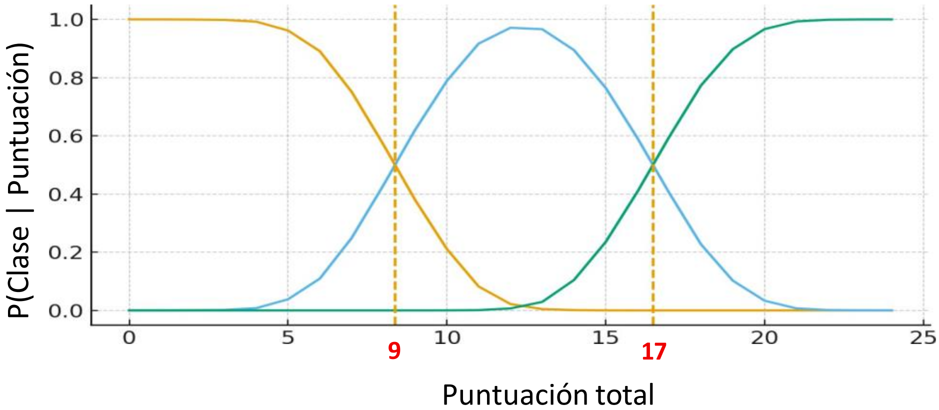
Esta prueba DiToM screening 6+ se desarrolló sobre la base de la teoría y se probó como parte de un estudio de validación no representativo. Los resultados que se presentan a continuación sirven para identificar a los alumnos y alumnas que pueden estar en riesgo debido a la falta de destrezas matemáticas clave para el aprendizaje posterior de las matemáticas en la escuela. La prueba ayuda al profesorado, al final del 6.º curso de Primaria y al comienzo del 1.º de ESO, a realizar una evaluación empírica del rendimiento de los alumnos e identificar a aquellos con resultados destacados para ofrecerles un apoyo adecuado en una fase temprana.

Descripción de la muestra y resultados principales

La prueba se llevó a cabo entre junio y julio de 2025, durante las últimas tres semanas del curso escolar 2024-2025, con 1841 alumnos de escuelas de Alemania, Croacia, España, Francia, Grecia, Italia y Suecia.

La prueba consta de las siguientes partes: habilidades aritméticas básicas con 11 ítems, proporcionalidad con 3 ítems y cálculos técnicos con 12 ítems. Si un ítem se resolvía correctamente, se otorgaba 1 punto; si la solución era incorrecta, incompleta o faltaba, se otorgaban 0 puntos. La prueba se llevó a cabo según criterios estandarizados (véase IV. Realización de la prueba DiToM) y se evaluó. Dado que la prueba está diseñada como una prueba de selección que identifica al alumnado que puede estar en situación de riesgo, se esperaban y deseaban fuertes efectos techo (es decir, no una distribución normal, sino una distribución sesgada hacia la izquierda). Esto se confirmó en la prueba piloto.

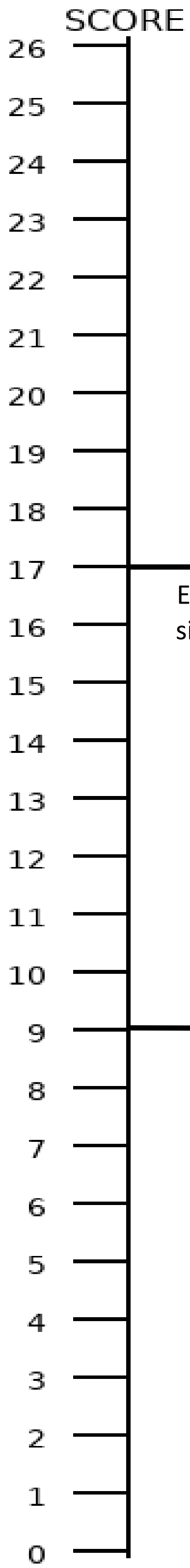
Para una comunicación orientada a la práctica, no se especifica un único valor umbral, sino dos valores umbral que diferencian entre los estudiantes potencialmente en riesgo, los que tienen que seguir siendo observados y los que potencialmente no están en riesgo. La determinación de la puntuación de corte se basó en datos obtenidos mediante un análisis de clases latentes con tres clases claramente diferenciables. Las clases no se superponen y son monotónicas. Las probabilidades a posteriori de la asignación de clases se representaron gráficamente en función de la puntuación, se ajustaron y se utilizaron para determinar los umbrales críticos para las decisiones de asignación en relación con sus puntos de intersección (véase la figura 1). Se utilizaron los puntos de intersección de las curvas (probabilidad a posteriori p = 0,5).



El análisis de clases muestra tres clases claramente diferenciadas, K1→ estudiantes con un rendimiento débil en la prueba de selección, K2→ estudiantes con un rendimiento algo débil en la prueba de selección y K3→ estudiantes con un rendimiento poco llamativo en la prueba de selección. Para determinar la puntuación crítica, se seleccionó el umbral hasta el cual existe una probabilidad del 50 % de estar en la clase con un rendimiento deficiente en la prueba. Por lo tanto, este primer umbral es de 9 puntos. El alumnado que haya obtenido una **puntuación de 9** puntos o menos necesita apoyo para trabajar los conceptos básicos, con el fin de poder desarrollar los siguientes contenidos de las clases de matemáticas de forma orientada a la comprensión. El segundo umbral es de 17 puntos. El alumnado que haya obtenido una **puntuación entre 9 y 17 puntos** debe ser observado en las clases de matemáticas durante las próximas semanas para ver si comprende los contenidos tratados y pueden aplicarlos de forma independiente.

VII. Hoja de evaluación

La siguiente escala proporciona indicaciones iniciales sobre las habilidades con las que el alumnado probablemente obtendrá puntos en los siguientes tres rangos: 0-9 puntos, 10-17 puntos y 18-26 puntos.



Este grupo no presenta características destacables en cuanto a los requisitos previos para el aprendizaje escolar de las matemáticas.

C: Además de A y B, el alumnado suelen ser capaces de...
... elegir la fracción correcta para un círculo sombreado, multiplicar números naturales, representar simbólicamente números decimales/fracciones en una recta numérica, comparar números decimales, maximizar el valor de una fracción eligiendo un denominador adecuado y realizar restas decimales.
Y el alumnado rara vez es capaz de......
realizar divisiones con números naturales y representar simbólicamente números decimales/fracciones en una recta numérica en posiciones más complejas o escalas mixtas.

Este grupo debe ser supervisado más de cerca en las próximas semanas para ver si el contenido siguiente puede ser comprendido y aplicado de forma autónoma.

B: Además de A, el alumnado suele ser capaz de......
realizar divisiones con números naturales normalmente correctas, identificar y ampliar patrones numéricos, encontrar los sumandos que faltan en ecuaciones decimales, sombrear una fracción dada de un rectángulo y multiplicar números naturales.
Y el alumnado rara vez es capaz de......
realizar multiplicaciones decimales sencillas e igualar cantidades..

Este grupo no presenta características destacables en cuanto a los requisitos previos para el aprendizaje escolar de las matemáticas.

A: El alumnado suele ser capaz de......
representar fracciones equivalentes, maximizar el valor de una fracción eligiendo un numerador adecuado, leer números decimales en un termómetro, aplicar el orden de las operaciones (reglas de prioridad), comparar una fracción impropia con números naturales e interpretar fracciones equivalentes.
Y el alumnado rara vez es capaz de......
utilizar el razonamiento proporcional con cantidades y precios y traducir textos escritos en expresiones matemáticas.

Referencias:

Behr, M. J., Harel, G., Post, T. R., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio and proportion. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 296–333). New York: Macmillan.

Brings, L., & Kleine, M. (2025). Diagnostic Tool in Mathematics (DiToM): Development and evaluation of a screening instrument for early identification of at-risk students in lower secondary mathematics education. In *Proceedings of EDULEARN25 Conference*. Palma, Spain. Facebook+7DiToM - Diagnostic Tool in Mathematics+7iated.org+7

Ehlert, A., & Fritz, A. (2013). Arithmetische Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern in den Klassen 5 bis 7 der Sekundarstufe. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 34(2), 237–263.

Gaidoschik, M. (2025). *Das dezimale Stellenwertsystem: Verstehen, verinnerlichen und flexibel anwenden*. Hannover: Klett Kallmeyer.

Polotskaia, E., & Savard, A. (2021). Some multiplicative structures in elementary education: a view from relational paradigm. Educational Studies in Mathematics, 106(3), 447–469.

Prediger, S. (2008). Zahlaspekte verstehen und flexibel nutzen. In E. Cohors-Fresenborg et al. (Eds.), *Mathematiklernen ermöglichen* (pp. 85–100). Münster: Waxmann. ph-gmuend.de+3Edoc LMU München+3Wikipedia+3

Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. Mathematics Education Research Journal, 26(2), 257–277. doi.org/10.1007/s13394-013-0087-2

Siegler, R. S., & Booth, J. L. (2005). Development of numerical estimation in young children. *Child Development*, 76(2), 428–444.

Siegler, R. S., & Lortie-Forgues, H. (2015). Conceptual knowledge of fraction arithmetic. *Journal of Educational Psychology*, 107(3), 909–918.

Treppo, A., & van den Heuvel-Panhuizen, M (2014). Visual representations as objects of analysis: the number line as an example. ZDM, 46, 45–58.

Van Dooren, W., De Bock, D., & Verschaffel, L. (2010). From addition to multiplication... and back: The development of students additive and multiplicative reasoning skills. *Cognition and Instruction*, 28(3), 360–381.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2007). Whole number concepts and operations. In F. K. Lester Jr. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 557–628). Charlotte, NC: Information Age.

Wittmann, E. Ch., & Müller, G. N. (2004). *Handbuch produktiver Rechenübungen*. Seelze: Friedrich Verlag.